

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ 5^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ
ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ



ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Δυνάμεις με βάση πραγματικό και εκθέτη ρητό αριθμό.

$$1. a^v = \begin{cases} 1 & , \text{εαν } v = 0 \\ a & , \text{εαν } v = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{v\text{-φορές}} & , \text{εαν } v \geq 2 \end{cases} \quad , a \in \mathbb{R} \text{ και } v \in \mathbb{N}$$

$$2. a^{-v} = \frac{1}{a^v} \quad \text{ή} \quad a^v = \frac{1}{a^{-v}} \quad , a \in \mathbb{R}^+ \text{ και } v \in \mathbb{N}^*$$

$$3. \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \text{ και } v \in \mathbb{N}^*$$

$$4. a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^\mu} \quad a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{Z} \text{ και } \nu \neq 0$$

Στις δυνάμεις με βάση και εκθέτη πραγματικό αριθμό ισχύουν οι ιδιότητες :

$$1. a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad 2. a^x : a^y = a^{x-y} \quad 3. (a \cdot \beta)^x = a^x \cdot \beta^x \quad 4. (a:\beta)^x = a^x : \beta^x$$

$$5. (a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad 6. a^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad (a \neq 1) \quad 7. a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \quad 8. a > \beta \text{ τότε: } \begin{cases} a^x > \beta^x \text{ για } x > 0 \\ a^x < \beta^x \text{ για } x < 0 \end{cases}$$

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός

Εκθετική συνάρτηση με βάση a ονομάζουμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = a^x$ όπου $a > 0$ και $a \neq 1$.

Σχόλιο

Εάν $a = 1$ τότε $f(x) = a^x = 1^x = 1$, έχουμε δηλαδή σταθερή συνάρτηση

Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = a^x$, $a > 0$ και $a \neq 1$.

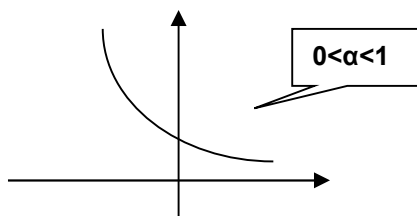
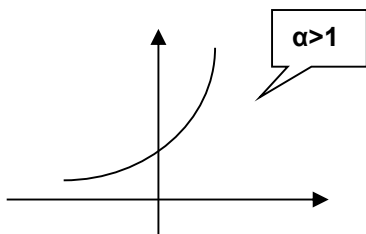
1. Πεδίο ορισμού της είναι όλο το σύνολο \mathbb{R} .

2. Σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

3. • Αν $a > 1$ τότε είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , δηλ. κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει αν $x_1 < x_2$ τότε $a^{x_1} < a^{x_2}$.
 Έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τέμνει τον yy' στο σημείο $A(0, 1)$.

• Αν $0 < a < 1$ τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , δηλ. κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει αν $x_1 < x_2$ τότε $a^{x_1} > a^{x_2}$

4. Έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα Ox και τέμνει τον yy' στο σημείο $A(0, 1)$.



Σχόλιο

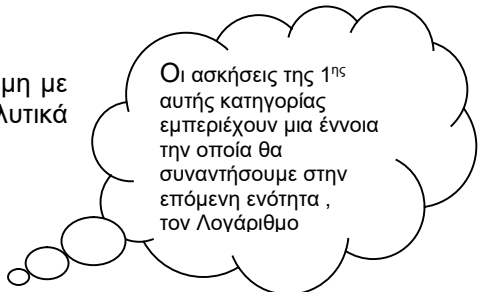
Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = a^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ με $a > 0$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

Παρατηρήσεις

- Η εκθετική συνάρτηση έχει την ιδιότητα : $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Στην ιδιότητα αυτή βασίζεται και η λύση των εκθετικών εξισώσεων.
- **Εκθετικές εξισώσεις** : Μια εξίσωση θα λέγεται εκθετική όταν θα εμφανίζεται σε αυτήν δύναμη με έκθετη παράσταση που περιέχει τον άγνωστο.
- **Μονοτονία και εκθετικές ανισώσεις** : Για την επίλυση των εκθετικών ανισώσεων θα εργαζόμαστε όπως και στις εκθετικές εξισώσεις για να καταλήξουμε στην επίλυση ανισώσεων της που θα βασίζεται στην μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης. Αναλυτικά διακρίνω δυο βασικές κατηγορίες :
 - i. Εάν έχουμε : $a^{f(x)} > 1 \Leftrightarrow a^{f(x)} > a^0 \Leftrightarrow f(x) > 0$,εάν $a > 1$ ή $f(x) < 0$,εάν $0 < a < 1$.
 - ii. Εάν έχουμε : $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$,εάν $a > 1$ ή $f(x) < g(x)$,εάν $0 < a < 1$.
- **Ο αριθμός e** : Το σύμβολο e παριστάνει τον άρρητο αριθμό 2,71828... και θα είναι ο αριθμός προς τον οποίο πλησιάζει η ακολουθία $\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ όταν το v αυξάνει απεριόριστα, τείνει δηλαδή στο $+\infty$.
- **Νόμος εκθετικής μεταβολής** : Η συνάρτηση $Q(t) = Q_0 e^{at}$ εκφράζει ένα φυσικό μέγεθος, που μεταβάλλεται με το χρόνο t.

Ασκήσεις

Μια εξίσωση θα λέγεται εκθετική όταν θα εμφανίζεται σε αυτήν δύναμη με έκθετη παράσταση που περιέχει τον άγνωστο. Πιο αναλυτικά διακρίνουμε τις εξής κατηγορίες ασκήσεων :



Οι ασκήσεις της 1ης αυτής κατηγορίας εμπεριέχουν μια έννοια την οποία θα συναντήσουμε στην επόμενη ενότητα , τον Λογάριθμο

1. Εάν $a^{f(x)} = \beta$ με $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha \neq 1$

- Εάν $\alpha = \kappa^v$ και $\beta = \kappa^\mu$ τότε : $a^{f(x)} = \beta \Leftrightarrow \kappa^{v \cdot f(x)} = \kappa^\mu \Leftrightarrow v \cdot f(x) = \mu \Leftrightarrow \dots$
- Εάν δεν ισχύουν οι πιο πάνω προϋποθέσεις τότε λογαριθμίζουμε:

$$a^{f(x)} = \beta \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a \beta \Leftrightarrow f(x) \log_a \alpha = \log_a \beta \Leftrightarrow f(x) = \frac{\log_a \beta}{\log_a \alpha} \Leftrightarrow \dots$$

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $3^{x^2+3x+5} = 27$ (1).

Λύση : (1) $\Leftrightarrow 3^{x^2+3x+5} = 3^3 \Leftrightarrow x^2+3x+5=3 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=-2$

2. Εάν $a^{f(x)} = \beta^{g(x)}$ με $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha, \beta \neq 1$

- Αν $g(x)=1$ τότε παίρνω την μορφή της (1).
- Αν τα α, β αναλύονται σε δυνάμεις με τις ίδιες βάσεις τότε : $(\kappa^v)^{f(x)} = (\kappa^\mu)^{g(x)} \Leftrightarrow \kappa^{v \cdot f(x)} = \kappa^{\mu \cdot g(x)} \Leftrightarrow v \cdot f(x) = \mu \cdot g(x) \Leftrightarrow \dots$
- Αν τα α, β δεν αναλύονται σε δυνάμεις με τις ίδιες βάσεις τότε λογαριθμίζω :
 $a^{f(x)} = \beta^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a \beta^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \log_a \alpha = g(x) \log_a \beta \Leftrightarrow f(x) = g(x) \log_a \beta \Leftrightarrow \dots$

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $2^{x^2+5} = 8^{2x}$ (1).

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Κεφάλαιο 5º

- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -

Λύση : (1) $\Leftrightarrow 2^{x^2+5} = (2^3)^{2x} \Leftrightarrow 2^{x^2+5} = 2^{6x} \Leftrightarrow x^2+5=6x \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \dots$

3. Εάν $A \cdot \alpha^{2x} + B \cdot \alpha^x + \Gamma = 0$ με $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}^*$

Θέτω $\alpha^x = \psi$ οπότε έχω : $A\psi^2 + B\psi + \Gamma = 0 \Leftrightarrow$ λύνω την εξίσωση.. $\Leftrightarrow \psi_1 = \alpha^x$ ή $\psi_2 = \alpha^x$.

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $2 \cdot 9^x - 3 \cdot 3^{x+1} - 135 = 0$ (1)

Λύση : (1) $\Leftrightarrow 2 \cdot (3^2)^x - 3 \cdot 3^x - 135 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x - 135 = 0 \Leftrightarrow$..θέτω $3^x = \psi > 0$..
 $\Leftrightarrow 2\psi^2 - 3\psi - 135 = 0 \Leftrightarrow \psi_1 = 9$ ή $\psi_2 = -15/2$ (απορ.) $\Leftrightarrow 3^x = 9 = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$.

4. Εάν $A \cdot \alpha^{2x} + B \cdot \alpha^x \cdot \beta^x + \Gamma \cdot \beta^{2x} = 0$ με $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}^*$

Η επίλυση τους ανάγεται σε εξισώσεις της μορφής (2) ως εξής :

$$A \cdot \alpha^{2x} + B \cdot \alpha^x \cdot \beta^x + \Gamma \cdot \beta^{2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{A \cdot \alpha^{2x}}{\alpha^{2x}} + \frac{B \cdot \alpha^x \cdot \beta^x}{\alpha^{2x}} + \frac{\Gamma \cdot \beta^{2x}}{\alpha^{2x}} = 0 \Leftrightarrow A + B \frac{\beta^x}{\alpha^x} + \Gamma \frac{\beta^{2x}}{\alpha^{2x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + B \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \Gamma \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2x} = 0 \Leftrightarrow \text{θετω} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x = \psi > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma \psi^2 + B\psi + A = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \psi_1 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x, \psi_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x.$$

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $2 \cdot 25^x - 3 \cdot 10^x + 4^x = 0$ (1)

Λύση : (1) $\Leftrightarrow 2 \cdot 5^{2x} - 3 \cdot (2 \cdot 5)^x + 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 5^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 5^x + 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 5^{2x}}{5^{2x}} - \frac{3 \cdot 2^x \cdot 5^x}{5^{2x}} + \frac{2^{2x}}{5^{2x}} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 - 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} = 0 \Leftrightarrow \text{θετω} \left(\frac{2}{5}\right)^x = \psi > 0 \Leftrightarrow \psi^2 - 3\psi + 2 = 0 \Leftrightarrow \psi_1 = 1 \text{ ή } \psi_2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 \text{ ή } \left(\frac{2}{5}\right)^x = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^0 \text{ ή } \log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{2}{5}\right)^x = \log_{\frac{2}{5}} 2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \log_{\frac{2}{5}} 2.$$

5. Εάν $[f(x)]^{g(x)} = 1$ με $f(x) > 0$: Έχουμε $[f(x)]^{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ \eta \\ f(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots$

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $(x^2 - 3x + 2)^{x^2 - 2x} = 1$, $x > 2$ ή $x < 1$ (1).

Λύση : (1) $\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)^{x^2 - 2x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ (απορ.)} \\ x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ ή } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1

Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha - 2}{\alpha + 1}\right)^x$, $\alpha \neq -1$.

α) Να ορίζεται σε όλο το σύνολο \mathbb{R} .

β) Να είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

γ) Να είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

δ) Να είναι "1-1".

Λύση

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Κεφάλαιο 5ο

- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -

α) Επειδή η συνάρτηση που μας δίνεται είναι μια εκθετική γνωρίζουμε ότι για να ορίζεται θα πρέπει η βάση να είναι θετικός αριθμός, δηλαδή :

$$\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha+1) > 0 \Leftrightarrow [\alpha-2 > 0 \text{ και } \alpha+1 > 0] \text{ ή } [\alpha-2 < 0 \text{ και } \alpha+1 < 0]$$

$$\Leftrightarrow [\alpha > 2 \text{ και } \alpha > -1] \text{ ή } [\alpha < 2 \text{ και } \alpha < -1] \Leftrightarrow \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2.$$

Η βάση ακόμα θα πρέπει να είναι διάφορη της μονάδας πράγμα το οποίο όμως ισχύει για κάθε α , αφού $\alpha-2 \neq \alpha+1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα όταν : $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha-2}{\alpha+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{\alpha-1} > 0 \Leftrightarrow \alpha-1 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1.$

γ) Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα όταν :

$$0 < \frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0 \text{ και } \frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1 \Leftrightarrow [\alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2] \text{ και } \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2.$$

δ) Μια εκθετική συνάρτηση όταν ορίζεται στο \mathbb{R} είναι "1-1". Δηλαδή θα πρέπει η βάση να είναι θετική και διάφορη του 1, δηλαδή $0 < \frac{\alpha-2}{\alpha+1} \neq 1$.

Την περίπτωση όμως αυτή την εξετάσαμε στο ερώτημα (α) άρα η συνάρτηση θα είναι "1-1" στο διάστημα που ορίζεται ως εκθετική δηλαδή όταν $\alpha < -1$ ή $\alpha > 2$.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η εξίσωση : $5^{2x-3} + 3 \cdot 5^x = 80$.

Λύση

$$\text{Έχουμε : } 5^{2x-3} + 3 \cdot 5^x = 80 \Leftrightarrow \frac{5^{2x}}{5^3} + 3 \cdot 5^x = 80 \Leftrightarrow \text{θέτω } 5^x = \psi > 0 \text{ τότε } 5^{2x} = \psi^2 \Leftrightarrow \frac{\psi^2}{125} + 3\psi = 80 \Leftrightarrow \psi^2 + 375\psi - 10000 = 0$$

$$\Leftrightarrow \psi_1 = 25 \text{ ή } \psi_2 = -400 \text{ (απορ.)} \Leftrightarrow 5^x = 25 = 5^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Παράδειγμα 3

Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $5 \cdot 9^x - 3 \cdot 6^x - 2 \cdot 4^x = 0$, β) $9^{x+1} - 27 \cdot 3^x = 0$ (1).

Λύση

$$\text{α) Έχουμε : } 5 \cdot 9^x - 3 \cdot 6^x - 2 \cdot 4^x = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot (3^2)^x - 3 \cdot (2 \cdot 3)^x - 2 \cdot (2^2)^x = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5 \cdot 3^{2x}}{2^{2x}} - \frac{3 \cdot 2^x \cdot 3^x}{2^{2x}} - \frac{2 \cdot 2^{2x}}{2^{2x}} = 0 \Leftrightarrow 5 \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 3 \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{έ'δω } \left(\frac{3}{2}\right)^x = \vartheta > 0 \Leftrightarrow 5\vartheta^2 - 3\vartheta - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\psi_1 = 1 \text{ ή } \psi_2 = -\frac{2}{5} \text{ (απορ.)} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

β) Καταρχήν η (1) ορίζεται στο \mathbb{R} . Επειδή το 9 είναι δύναμη του 3 προσπαθούμε να δημιουργήσουμε δυνάμεις με βάση το 3.

$$\text{Αναλυτικά : } (\beta) \Leftrightarrow (3^2)^{x+1} - 27 \cdot 3^x = 0 \Leftrightarrow 3^{2(x+1)} = 3^3 \cdot 3^x \Leftrightarrow 3^{2(x+1)} = 3^{3+x} \Leftrightarrow 2(x+1) = 3+x \Leftrightarrow x = 1.$$

Παράδειγμα 4

Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $7^{x^2-2x+1} = 5^{(x-1)^2}$ (1), β) $\frac{1}{4}\sqrt{2^x} = 8 \cdot 2^x$ (2).

Λύση

α) Καταρχήν η (1) ορίζεται στο \mathbb{R} . Παρατηρώντας την όμως βλέπουμε ότι έχουμε ισότητα δυνάμεων με βάσεις πρώτους αριθμούς τότε μια προφανής λύση της εξίσωσης δίνεται στην περίπτωση όπου και οι δυο εκθέτες θα είναι ταυτόχρονα μηδέν, δηλαδή όταν έχω :

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Κεφάλαιο 5ο**- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -**

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ και } (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \text{ και } (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Η άλλη λύση της εξίσωσης προκύπτει λογαριθμίζοντας την εξίσωση.

$$\beta) \text{ Έχουμε : } (2) \Leftrightarrow \frac{1}{4}(2^x)^{\frac{1}{2}} = 8 \cdot 2^x \text{ (θέτω } 2^x = \psi > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \psi^{\frac{1}{2}} = 8\psi \text{ (υψώνω στο τετράγωνο αφού } 8\psi > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \psi^{\frac{1}{2}} = 32\psi$$

$$\Leftrightarrow (\psi^{\frac{1}{2}})^2 = (32\psi)^2 \Leftrightarrow \psi = 1024\psi^2 \Leftrightarrow 1024\psi^2 - \psi = 0 \Leftrightarrow \psi = 0 \text{ ή } \psi = 1024$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow x = 10.$$

Παράδειγμα 5

Να λυθεί η εξίσωση : $(x^2 - x + 2)^{\eta\mu x} = \sqrt{x^2 - x + 2}$ (1).

Λύση

Καταρχήν η εξίσωση πρέπει να έχει : $x^2 - x + 2 > 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta < 0$. Έχουμε λοιπόν :

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - x + 2)^{\eta\mu x} = (x^2 - x + 2)^{1/2} \text{ (2)}.$$

Η σχέση (2) είναι μια ισότητα δυνάμεων που ισχύει όταν : $a^k = a^l \Leftrightarrow k=l$ ή $a=1$, οπότε από (2) έχουμε :

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{6} \text{ ή } x^2 - x + 2 = 1 \text{ (}\Delta < 0 \text{)} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}.$$

Παράδειγμα 6

Να λυθούν οι ανισώσεις : $\alpha) 2^{x^2 - 2x} < 8^{x-2}$, $\beta) \left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} > \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$

Λύση

$$\alpha) 2^{x^2 - 2x} < 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2 - 2x} < 2^{3(x-2)} \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3(x-2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

$$\beta) \left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} > \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-(7x-3)} \Leftrightarrow 3x-7 < -(7x-3) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 10x < 10 \Leftrightarrow x < 1.$$

Παράδειγμα 7

Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις : $\alpha) 2^x + 2^{1-x} < 3$, $\beta) (x^2 - x + 2)^x > \left(\sqrt{x^2 - x + 2}\right)^{\frac{8}{x}}$

Λύση

$$\alpha) \text{ Έχουμε : } 2^x + 2^{1-x} < 3 \Leftrightarrow 2^x + \frac{2^1}{2^x} < 3 \text{ (θέτω } 2^x = \psi > 0 \text{)} \Leftrightarrow \psi + \frac{2}{\psi} < 3 \text{ (πολλαπλασιάζω με } \psi > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \psi^2 + 2 < 3\psi \Leftrightarrow \psi^2 - 3\psi + 2 < 0 \text{ (}\Delta = 1 \text{ με } \psi_1 = 1 \text{ ή } \psi_2 = 2 \text{)} \Leftrightarrow 1 < \psi < 2 \Leftrightarrow 2^0 < 2^x < 2^1 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

$\beta)$ Καταρχήν η εξίσωση πρέπει να έχει : $x^2 - x + 2 > 0$, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta < 0$

$$\text{Η αρχική ανίσωση γράφεται : } (x^2 - x + 2)^x > (x^2 - x + 2)^{\frac{1 \cdot 8}{x}} \Leftrightarrow (x^2 - x + 2)^x > (x^2 - x + 2)^{\frac{4}{x}} \text{ (1)}$$

i) Εάν για την (1) έχουμε : $x^2 - x + 2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε:

$$x > \frac{4}{x} \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -2 < x < 0 \text{ ή } x > 2.$$

ii) Εάν για την (1) έχουμε $0 < x^2 - x + 2 < 1 \Leftrightarrow$ αδύνατη.

Παράδειγμα 8

Να λυθούν τα συστήματα : α) $\begin{cases} 2 \cdot 2^{2x+y} = 8^{-1} \cdot 4^{x-y} \\ 3^{2x+1} = 81 \cdot 3^{4y-2} \end{cases}$, β) $\begin{cases} 3^{x+1} - 2^y = 8 \\ 3^{x-1} + 2^{y+1} = 3 \end{cases}$, γ) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 36 \\ 4^x \cdot 3^y = 48 \end{cases}$.

Λύση

α) $\begin{cases} 2 \cdot 2^{2x+y} = 8^{-1} \cdot 4^{x-y} \\ 3^{2x+1} = 81 \cdot 3^{4y-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{1+2x+y} = 2^{-3} \cdot 2^{2(x-y)} \\ 3^{2x+1} = 3^4 \cdot 3^{4y-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{1+2x+y} = 2^{-3+2(x-y)} \\ 3^{2x+1} = 3^{4+4y-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2x+y = -3+2(x-y) \\ 2x+1 = 2+4y \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{6} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$

β) Το αρχικό σύστημα γράφεται ισοδύναμα : $\begin{cases} 3^x \cdot 3 - 2^y = 8 \\ 3^x \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 2^y = 3 \end{cases}$.

Θέτοντας όμως $3^x = \omega > 0$ και $2^y = \varphi > 0$ έχουμε πλέον το εξής σύστημα :

$\begin{cases} 3\omega - \varphi = 8 \\ \frac{\omega}{3} + 2\varphi = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 3\omega - 8 \\ \omega + 6\varphi = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 1 \\ \omega = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 2^0 \\ 3^x = 3^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

γ) Διαιρούμε κατά μέλη τις δυο εξισώσεις του συστήματος και έχουμε :

$\left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^y = \frac{36}{48} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-y} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-y} = \left(\frac{3}{4}\right)^1 \Leftrightarrow x-y = 1 \Leftrightarrow x = y+1$.

Η πρώτη εξίσωση αρα γράφεται : $3^{y+1} \cdot 4^y = 36 \Leftrightarrow 3^y \cdot 3 \cdot 4^y = 36 \Leftrightarrow (3 \cdot 4)^y = 12 \Leftrightarrow 12^y = 12^1 \Leftrightarrow y = 1$.
Τελικά η λύση τους συστήματος είναι $(x,y) = (2,1)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ “ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ”

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

- | | | |
|--|---|---|
| i. Η f έχει πεδίο ορισμού το R | Σ | Λ |
| ii. Η f έχει σύνολο τιμών το R | Σ | Λ |
| iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R | Σ | Λ |
| iv. Η f έχει άξονα συμμετρίας τον γ' y | Σ | Λ |
| v. Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των x | Σ | Λ |
| vi. Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική με άξονα συμμετρίας τον γ' y προς τη γραφική παράσταση της $g(x) = 5^x$. | Σ | Λ |
| vii. Ισχύει ότι $f(2) > f(1/5)$ | Σ | Λ |
| viii. Ισχύει ότι $f(2^{1999}) > f(2^{2000})$ | Σ | Λ |
| ix. Το σημείο A (0, 1) ανήκει στην γραφική παράσταση της f | Σ | Λ |
| x. Το σημείο $M(\sqrt[5]{2}, -5^{-2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f. | Σ | Λ |

2. Ισχύει ότι:

- | | | |
|--|---|---|
| i. $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2^x$, για κάθε $x \in R$ | Σ | Λ |
| ii. $(\sqrt{3})^x \neq (\sqrt{5})^x$, για κάθε $x \in R$ | Σ | Λ |

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Κεφάλαιο 5ο**- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -**

- iii. $(\sqrt{3})^{-x} > 3^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ Λ
- iv. $(-1)^{2x} = 1^{2x}$, αν x ακέραιος Σ Λ
- v. $(-1)^{2x+1} = -1$, αν x ακέραιος Σ Λ

3. Ισχύει ότι:

- i. $(x+1)^{x-1} = 1$ αν $x = 1$ Σ Λ
- ii. $(x-1)^x = 1$, αν $x = 0$ Σ Λ
- iii. $x^{1+x} = 1$, αν $x = 1$ Σ Λ
- iv. $x^{x-1} = 1$, αν $x = 1$ Σ Λ
- v. $(1-x)^{x+1} = 1$ αν $x = -1$ Σ Λ

4. Ισχύει ότι:

- i. $(0,8)^x > (0,8)^y$, αν $x < y$
- ii. $(1,5)^x < (1,5)^y$, αν $x < y$ Σ Λ
- iii. $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \left(\frac{1}{5}\right)^y$, αν $x < y$ Σ Λ
- iv. $(0,31)^x < (0,31)^y$, αν $x > y$ Σ Λ
- v. $(2e)^x > (2e)^y$, αν $x > y$ Σ Λ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 3^x$ τότε είναι :
 Α. το διάστημα $[0, +\infty)$ Β. το διάστημα $(-\infty, 0]$ Γ. το διάστημα $(-\infty, 0)$ Δ. το διάστημα $(0, +\infty)$
 Ε. το σύνολο \mathbb{R}^+
2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 4^x$
 Α. έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ Β. τέμνει μόνο τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1)$.
 Γ. τον άξονα $y'y$ σε 2 σημεία. Δ. έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα Ox Ε. τίποτα από τα προηγούμενα.
3. Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ είναι:
 Α. γνησίως φθίνουσα Β. άρτια Γ. περιττή Δ. γνησίως αύξουσα Ε. δεν είναι μονότονη
4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = -2^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της $f(x) = 2^x$ ως προς
 Α. τον άξονα $y'y$ Β. την ευθεία $y=x$ Γ. την ευθεία $y = -x$ Δ. τον άξονα $x'x$ Ε. κέντρο το $O(0,0)$
5. Η γραφική Παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της $f(x) = 5^x$ ως προς :
 Α. τον άξονα $x'x$ Β. τον άξονα $y'y$ Γ. την ευθεία $y = \frac{1}{5}$ Δ. την ευθεία $y = 5$ Ε. κέντρο το $O(0, 0)$

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Κεφάλαιο 5ο
- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -

6. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

- A. η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} B. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}
Γ. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ Δ. η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο M
(0, 1/2) E. η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο N (1, 0)

7. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2^x$ τότε ισχύει

- A. $f(2) > f(3)$ B. $f(2) < f(3)$ Γ. $f(2) \geq f(3)$ Δ. $f(2) = 2f(3)$ E. $f(2) = f(3)$

8. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ τότε ισχύει

- A. $f(2) < f(3)$ B. $f(2) \leq f(3)$ Γ. $f(2) > f(3)$ Δ. $f(2) = 3f(3)$ E. $f(2) = f(3)$

9. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 3^x$ τότε **δεν** είναι σωστή η

- A. $f(0,5) < f(0,8)$ B. $f(-2) > f(-3)$ Γ. $f\left(\frac{1}{5}\right) > f\left(\frac{1}{7}\right)$ Δ. $f(1,3) > f(-1,3)$ E. $f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{5})$

10. Αν $3^{\sqrt{x}} = 27$, τότε το x είναι

- A. 27 B. 1/9 Γ. 0 Δ. 3 E. 9

11. Δίνεται η εξίσωση $2^{x^2-5x+10} = 16$. Τότε το x είναι

- A. 1 ή -1 B. 2 ή 3 Γ. -2 ή -3 Δ. 0 E. τίποτα από τα προηγούμενα

12. Αν $2^{2^x} = 16$, τότε το x είναι

- A. 4 B. 1 Γ. 2 Δ. -1 E. -2

13. Αν $f(x) = 2^x$, τότε το $f(f(2))$ ισούται με

- A. 16 B. 8 Γ. 32 Δ. 1 E. 4

14. Η εξίσωση $3^x + 2^x = 2$ έχει λύση τον αριθμό

- A. -2 B. -1 Γ. 1 Δ. 2 E. 0

15. Η εξίσωση $3^x + 3^{-x} = -1$

- A. έχει λύση ένα θετικό αριθμό B. έχει λύση ένα αρνητικό αριθμό
Γ. έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό $\neq 0$ Δ. είναι αδύνατη E. έχει λύση την $x = 0$

16. Δίνεται η ανίσωση $3^{x-2} > 1$. Τότε ισχύει

- A. $x > 2$ B. $x = 0$ Γ. $x < 2$ Δ. $x \leq 2$ E. $x = 2$

17. Δίνεται η ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 1$. Τότε ισχύει

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Κεφάλαιο 5ο**- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -**

A. $x \geq 2$ B. $x = -1$ Γ. $x \leq 1$ Δ. $x > 1$ Ε. $x > 2$

18. Δίνεται η ανίσωση $5^{x+1} < 625$. Τότε ισχύει

A. $x = 3$ B. $x \geq 3$ Γ. $x = 5$ Δ. $x > 3$ Ε. $x < 3$

19. Δίνεται η ανίσωση $\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{16}{81}$. Τότε ισχύει

A. $x \geq 16$ B. $x \leq 4$ Γ. $x > 4$ Δ. $x = 16$

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

20. Η ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2$ αληθεύει

A. Για $x \in (-\infty, -1)$ B. Για $x \in (-\infty, -1]$ Γ. Για $x \in (-\infty, 0)$ Δ. Για $x \in (-1, +\infty)$ Ε. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

21. Έστω η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = a^x$ με $0 < a \neq 1$.

Ποιο από τα παρακάτω σημεία αποκλείεται να ανήκει στη γραφική παράσταση της f;

A. (-2, 8) B. (0, 1) Γ. (3, -27) Δ. (3, 2) Ε. (2, 3)

22. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2^x$ και $g(x) = e^x$. Τότε ισχύει ότι

A. $f(e) = g(e)$ B. $f(e) > g(e)$ Γ. $f(2) < g(2)$ Δ. $f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$ Ε. $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να λυθούν οι παρακάτω εκθετικές εξισώσεις :

i. $\left(\frac{4}{3}\right)^{3x-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-6}$ ii. $(\sqrt{5} + 2)^{x^2-4x+3} = 1$ iii. $3^{x+2} + 3^{x+1} = 11 + 3^x$.

2.* Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $3^{2x} = \frac{1}{81}$ ii. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$ iii. $2^{-x} = 32$ iv. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 27$ v. $\frac{1}{2^x} = 16$.

3.* Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $2^{x^2-5x+6} = 1$ ii. $\left[3^{(x^2-9)}\right]^{(x-2)} = 1$ iii. $4^{3x} = 2^4 \cdot 16^{\frac{x}{2}}$
 iv. $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ v. $3^{2x-2} + 3^x = 4$ vi. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$

4. Να λυθούν οι παρακάτω εκθετικές εξισώσεις :

i. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ ii. $4^x - 5 \cdot 2^x = 24$ iii. $3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x-1} + 3^x - 3^{x-1} = 128$

5.* Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$ ii. $5 \cdot 2^x = 2^{x+3} - 3\sqrt{2}$ iii. $3^{x+1} - 28 + 9 \cdot 3^{-x} = 0$
 iv. $2^{x-2} - 3^{x-3} - 2^{x-3} + 3^{x-4} = 0$ v. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Κεφάλαιο 5º
- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -

6. Να λυθούν οι παρακάτω εκθετικές εξισώσεις :

i. $2^{X+3} + 4 \cdot 5^{X+2} = 2^{X+2} + 5^{X+3}$ ii. $3 \cdot 4^X + 2 \cdot 9^X = 5 \cdot 6^X$ iii. $5 \cdot 9^X - 3 \cdot 6^X - 2 \cdot 4^X = 0$.

7. Να λυθούν οι παρακάτω εκθετικές εξισώσεις :

i. $3 \cdot 3^{2X-4} - 10 \cdot 3^{X^2-2} + 3 = 0$ ii. $X+1\sqrt{16} = 8 \cdot X+1\sqrt{2^{-8}}$ iii. $2^{\eta\mu 2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi} = 4^{1-2\eta\mu^2\frac{\chi}{2}}$.

8.* Να λύσετε τις εξισώσεις : i. $(X^2 - 5X + 5)^{X+2} = 1$ ii. $e^{2X} + e = e^X + e^{X+1}$.

9.* Να λύσετε τις εξισώσεις : i. $3^{\eta\mu 2\chi} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ii. $3^{\eta\mu 2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi} = 9^{1-2\eta\mu^2\frac{\chi}{2}}$ iii.

$2^{\eta\mu\chi} \cdot (4^{\eta\mu\chi})^{\sigma\upsilon\nu\chi} = \sqrt[5]{32^{\eta\mu 3\chi}}$.

10. Να λυθούν οι παρακάτω εκθετικές ανισώσεις : i. $(1,5)^{3X-7} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{7X-3}$ ii. $32^X < 16^{1-X}$

iii. $(\sqrt{2}-1)^{X^4-5X^2+4} > 1$.

11.* Να λύσετε τις ανισώσεις : i. $3^{X^2-7X+6} < 1$ ii. $\left(\frac{1}{2}\right)^{X^2-2X} < \left(\frac{1}{4}\right)^{X+\frac{5}{2}}$ iii. $(0,5)^{5X-X^2-1} < 0,125$

iv. $4^X - 6 \cdot 2^X + 8 < 0$.

12. Να λυθούν οι παρακάτω εκθετικές ανισώσεις :

i. $2^{X+3} + 2^{X+1} > 48 + 2^{X+2}$ ii. $2^{2X+1} - 5 \cdot 2^X + 2 < 0$ iii. $e^{-X} + e^X - e > e^{-1}$

13. Να λυθούν οι παρακάτω εκθετικές ανισώσεις :

i. $16^X - 17 \cdot 4^X + 16 > 0$ ii. $0,5^X + 2^{1-X} \leq 3$ iii. $\frac{1}{9^X} - 4 \cdot 3^{-X} + 3 < 0$

14.* Να λύσετε τα συστήματα

i. $\begin{cases} 9^{X+1} = 3^{Y+3} \\ 4^{X+Y} = 8 \cdot 2^X \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2^{X^2-5X+6} = 1 \\ X + Y = 8 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2^{X-1} \cdot 4^Y = 1 \\ 3^X \cdot 3^{Y-1} = 9 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} 3^X - 5^Y = 4 \\ 9 \cdot 3^{-X} + 5^Y = 6 \end{cases}$.

15. Να λυθούν τα παρακάτω εκθετικά συστήματα :

i. $\begin{cases} 2^X - 3^Y = 7 \\ 4^X - 9^Y = 175 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 4^X \cdot 8^Y = 256 \\ 64 \cdot 4^X - 8^Y = 0 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2^X = 3^Y \\ 3^X = 2^Y \end{cases}$.

16.* Αν f και g δύο συναρτήσεις με $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ και $g(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$ να αποδείξετε ότι:

$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$.

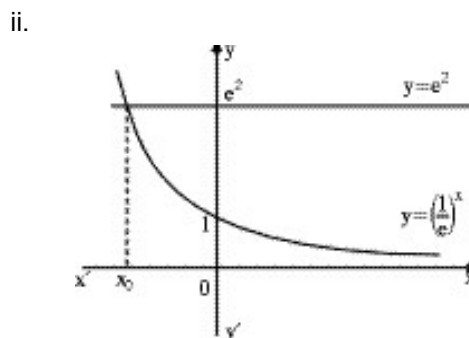
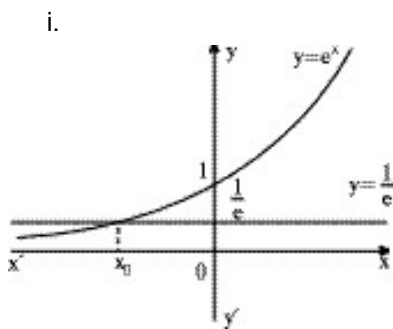
17.*i. Να βρείτε το $(a \neq 5)$ ώστε η $f(x) = \left(\frac{1-a}{a-5}\right)^x$ να είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το a , $(a \neq 0)$ ώστε η $g(x) = \left(1 - \frac{5}{a}\right)^x$ να είναι γνησίως φθίνουσα.

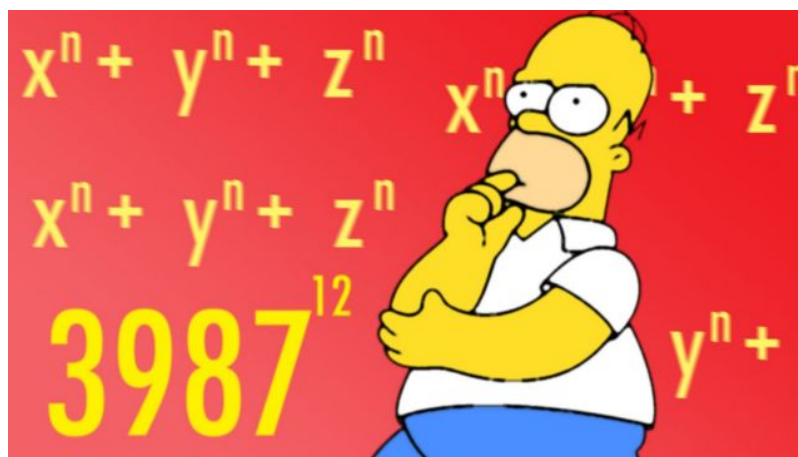
18.* Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = (1 - k^2)^x$.

- i. Για ποιες τιμές του k ορίζεται η f;
- ii. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του k για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.
- iii. Να βρείτε το k ώστε η γραφική παράσταση της f(x) να περνάει από το σημείο $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
- iv. Να βρείτε τις τιμές του k ώστε η γραφική παράσταση της f(x) να περνάει από το $\Sigma(2, 1)$.

19.* Να βρείτε το σημείο x_0 σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:



ΚΑΛΗ ΜΕΛΕΤΗ!



xasim 2020

Ο ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ

Ορισμός

Λογάριθμος ενός αριθμού $\theta > 0$ με βάση το a όπου $0 < a \neq 1$, θα θεωρούμε τη μοναδική λύση της εξίσωσης $a^x = \theta$. Την λύση αυτή θα την ονομάζουμε λογάριθμο του θ με βάση a και θα συμβολίζεται με $\log_a \theta$.

Δηλαδή ισχύει: $a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$.

Σχόλιο

Από τον ορισμό του λογάριθμου προκύπτουν κάποιες άμεσες ιδιότητες:

$$1. \log_a a^x = x \quad 2. a^{\log_a \theta} = \theta \quad 3. \log_a 1 = 0 \quad 4. \log_a a = 1.$$

Ιδιότητες

Εάν $0 < a \neq 1$ η βάση των λογάριθμων, $k \in \mathbb{R}$ και $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ τότε αποδεικνύεται ότι:

1. Λογάριθμος γινομένου: $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

2. Λογάριθμος πηλίκου: $\log_a(\theta_1 : \theta_2) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$

3. Λογάριθμος δυνάμεως: $\log_a \theta^k = k \cdot \log_a \theta$ (συνέπεια $\log_a \sqrt[k]{\theta} = \frac{1}{k} \log_a \theta$)

4. Αλλαγή βάσης λογαρίθμου: $\log_b \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a b}$ με $0 < a, b \neq 1$.

Παρατηρήσεις

1. Για να μην κάνουμε λάθος όταν $x > 0$ ή $\frac{x}{y} > 0$ ή $x^k > 0$ και δεν ξέρουμε το πρόσημο των x, y

γράφουμε τότε: α) $\log(x \cdot y) = \log|x| + \log|y|$, β) $\log \frac{x}{y} = \log|x| - \log|y|$, γ) $\log x^k = k \cdot \log|x|$

2. Ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες των λογάριθμων, που όταν χρησιμοποιούνται θα πρέπει να αποδεικνύονται όμως, είναι:

i. $\log_a \beta \cdot \log_b \alpha = 1 \Leftrightarrow \log_a \beta = \frac{1}{\log_b \alpha}$ ii. $x^{\log y} = y^{\log x}$, 3. $\log_{a^k} \beta = \frac{1}{k} \log_a \beta$.

Ορισμός

Δεκαδικός λογάριθμος ενός αριθμού $\theta > 0$ θα ονομάζεται ο λογάριθμος του θ με βάση το 10 και συμβολίζεται με $\log \theta$ αντί να γράφουμε $\log_{10} \theta$ άρα $10^x = \theta \Leftrightarrow x = \log \theta$.

Ορισμός

Φυσικός ή νεπέριος λογάριθμος ενός αριθμού $\theta > 0$ θα ονομάζεται ο λογάριθμος του θ με βάση τον αριθμό $e = 2,71..$ συμβολίζεται δε με $\ln \theta$ αντί $\log_e \theta$ άρα $e^x = \theta \Leftrightarrow x = \ln \theta$.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός

Έστω η εκθετική συνάρτηση $g(x)=a^x$, $0 < a \neq 1$ με $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ τότε η αντίστροφη της g έστω f με $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, θα καλείται λογαριθμική συνάρτηση με βάση a και τύπο $f(x)=\log_a x$ με $0 < a \neq 1$ και $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\log_a x$ με $0 < a \neq 1$

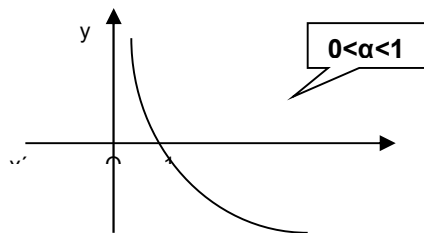
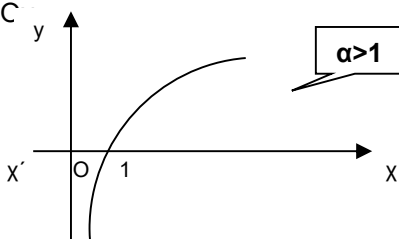
i. Πεδίο ορισμού της είναι το $(0, +\infty)$

ii. Σύνολο τιμών της είναι το \mathbb{R} .

iii. Μονοτονία :

• Αν $a > 1$ τότε είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}_+^* δηλ. για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ ισχύει αν $x_1 < x_2$ τότε $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x ' στο σημείο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον ημίάξονα Oy '

• Αν $0 < a < 1$ τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}_+^* δηλ. για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ ισχύει αν $x_1 < x_2$ τότε $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x ' στο σημείο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον ημίάξονα Oy '



Παρατηρήσεις

1. Για την λογαριθμική συνάρτηση προφανώς θα ισχύουν όλες οι ιδιότητες των λογαρίθμων.

2. Η λογαριθμική συνάρτηση έχει την ιδιότητα: $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Στην ιδιότητα αυτή βασίζεται και η λύση των λογαριθμικών εξισώσεων.

3. Όταν μας ζητούν το πεδίο ορισμού μιας λογαριθμικής της μορφής $f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα: $g(x) > 0$ και $0 < \varphi(x) \neq 1$.

4. Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος εμφανίζεται στο λογάριθμο θα ονομάζονται λογαριθμικές εξισώσεις. Για τις ασκήσεις που αφορούν την λύση λογαριθμικών εξισώσεων θα πρέπει να κάνουμε τα εξής :

Πάντα ξεκινάμε με την ανεύρεση των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία έχει νόημα η εξίσωση.

- Αν έχουμε $\log_a f(x) = \beta$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = a^\beta$,
- Αν έχουμε $\log_a f(x) = g(x)$ λύνουμε την εξίσωση $a^{g(x)} = f(x)$,
- Αν έχουμε $\log_{g(x)} f(x) = \varphi(x)$ λύνουμε την εξίσωση $g(x)^{\varphi(x)} = f(x)$,
- Αν έχουμε $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$,

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!! αν σε μια λογαριθμική εξίσωση οι λογάριθμοι έχουν διαφορετική βάση θα πρέπει να μετατρέπονται όλοι σε λογάριθμους με την ίδια βάση.

5. Η λύση των λογαριθμικών ανισώσεων βασίζεται στην μελέτη της μονοτονίας των λογαριθμικών συναρτήσεων. Για τις ασκήσεις που αφορούν την λύση λογαριθμικών ανισώσεων θα πρέπει πάντα να ξεκινάμε με την ανεύρεση των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία έχει νόημα η ανίσωση να λύνουμε και τέλος θα πρέπει να συναληθεύουμε την λύση που θα βρίσκουμε με το σύνολο ορισμού της ανίσωσης.

$$\text{Αν έχουμε } \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) & \text{αν } a > 1 \\ f(x) > g(x) & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\text{Αν έχουμε } \log_a f(x) < 1 = \log_a a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a & \text{αν } a > 1 \\ f(x) > a & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\text{Αν έχουμε } \log_a f(x) < 0 = \log_a 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 1 & \text{αν } a > 1 \\ f(x) > 1 & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

7. Τα λογαριθμικά συστήματα δεν έχουν συγκεκριμένο τρόπο λύσης. Συνήθως θα γίνεται μια προσπάθεια η οποία έγκειται στην μετατροπή των εξισώσεων του συστήματος είτε με τον ορισμό είτε με τις ιδιότητες των λογάριθμων σε μια πιο απλή μορφή.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1

Σε μια γεωμετρική πρόοδο (a_n) με θετικούς όρους έχουμε $a_1=\alpha$, $a_\mu=\beta$ και $a_\kappa=\gamma$. Να αποδείξετε τότε ότι :
 $(\mu-\kappa)\log\alpha+(\kappa-\lambda)\log\beta+(\lambda-\mu)\log\gamma=0$.

Λύση

Εάν a_1 ο πρώτος όρος της πρόοδου και ω ο λόγος της γ.π. τότε :

$$a^\lambda=\alpha \Leftrightarrow a_1 \cdot \omega^{\lambda-1}=\alpha \quad (1) \quad , a_\mu=\beta \Leftrightarrow a_1 \cdot \omega^{\mu-1}=\beta \quad (2) \quad , a_\kappa=\gamma \Leftrightarrow a_1 \cdot \omega^{\kappa-1}=\gamma \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε θα έχουμε : } & (\mu-\kappa)\log(a_1 \cdot \omega^{\lambda-1}) + (\kappa-\lambda)\log(a_1 \cdot \omega^{\mu-1}) + (\lambda-\mu)\log(a_1 \cdot \omega^{\kappa-1}) = \\ & (\mu-\kappa)(\log a_1 + \log \omega^{\lambda-1}) + (\kappa-\lambda)(\log a_1 + \log \omega^{\mu-1}) + (\lambda-\mu)(\log a_1 + \log \omega^{\kappa-1}) = \\ & (\mu-\kappa)[\log a_1 + (\lambda-1)\log \omega] + (\kappa-\lambda)[\log a_1 + (\mu-1)\log \omega] + (\lambda-\mu)[\log a_1 + (\kappa-1)\log \omega] = \\ & (\mu-\kappa + \kappa - \lambda + \lambda - \mu)\log a_1 + [(\mu-\kappa)(\lambda-1) + (\kappa-\lambda)(\mu-1) + (\lambda-\mu)(\kappa-1)]\log \omega = 0 \cdot \log a_1 + 0 \cdot \log \omega = 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με $f(x)=\log\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$.

β) Αποδείξτε επίσης ότι η συνάρτηση είναι "1-1",

γ) Τέλος να δείξετε ότι είναι μια περιπτή συνάρτηση.

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $\left(\frac{3-x}{3+x}\right) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -3 < x < 3$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $A=(-3,3)$.

β) Εάν $x_1, x_2 \in A$ τότε έχουμε :

$$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \log\left(\frac{3-x_1}{3+x_1}\right) = \log\left(\frac{3-x_2}{3+x_2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{3-x_1}{3+x_1}\right) = \left(\frac{3-x_2}{3+x_2}\right) \xrightarrow{\text{πραξεις}} \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2. \text{ Άρα η } f \text{ είναι "1-1".}$$

γ) Για κάθε $x \in A$ έχω και $-x \in A$:

$$f(-x) = \log\left(\frac{3-(-x)}{3+(-x)}\right) = \log\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = \log\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1} = -\log\left(\frac{3-x}{3+x}\right) = -f(x) \text{ Οπότε η συνάρτηση είναι περιπτή.}$$

Παράδειγμα 3

Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $\log_5(3\chi+2)-\log_5(\chi+1)=\log_5 2$, β) $\log(\chi-1)+\log(\chi+2)=2(1-\log 5)$.

Λύση

α) Πρέπει καταρχήν $3\chi+2>0$ και $\chi+1>0 \Leftrightarrow \chi > -\frac{2}{3}$.

$$\text{Η αρχική εξίσωση γράφεται : } \log_5\left(\frac{3\chi+2}{\chi+1}\right) = \log_5 2 \Leftrightarrow \frac{3\chi+2}{\chi+1} = 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \chi = 0 \text{ (δεκτή).}$$

β) Πρέπει $\chi-1>0$ και $\chi+2>0 \Leftrightarrow \chi > 1$. Η αρχική εξίσωση τώρα γίνεται :

$$\log[(\chi-1)(\chi+2)] = 2(\log 10 - \log 5) \Leftrightarrow \log(\chi^2 + \chi - 2) = 2\log\left(\frac{10}{5}\right) = 2\log 2 = \log 2^2 = \log 4 \Leftrightarrow \chi^2 + \chi - 2 = 4 \Leftrightarrow$$

$\chi = 2$ (δεκτή) ή $\chi = -3$ (απορ.)

Παράδειγμα 4

Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$, β) $\chi \log 5 - \log(1+2^\chi) = \chi - \log 6$.

Λύση

α) Οι αριθμοί καταρχήν $9^{x-1}+7$ και $3^{x-1}+1$ είναι θετικοί για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση γράφεται:

$$\log_2[3^{2(x-1)}+7] = \log_2 2^2 + \log_2(3^{x-1}+1) \Leftrightarrow \log_2[3^{2(x-1)}+7] = \log_2[4 \cdot (3^{x-1}+1)] \Leftrightarrow 3^{2x-2}+7 = 4 \cdot 3^{x-1}+4 \Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3^{-2} + 7 = 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} + 4 \quad (1) . \text{ Θέτοντας στην (1) όπου } 3^x = y > 0 \text{ έχουμε ισοδύναμα την εξίσωση:}$$

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Κεφάλαιο 5º**- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -**

$$\frac{y^2}{9} + 7 = \frac{4y}{3} + 4 \Leftrightarrow y^2 - 12y + 36 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \text{ ή } y=9 \Leftrightarrow 3^x=3=3^1 \text{ ή } 3^x=9=3^2 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2$$

β) Καταρχήν η εξίσωση έχει νόημα για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση γράφεται λοιπόν :

$$\log 5^x - \log(1+2^x) = \log 10^x - \log 6 \Leftrightarrow \log\left(\frac{5^x}{1+2^x}\right) = \log\left(\frac{10^x}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{5^x}{1+2^x} = \frac{10^x}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot 5^x = 10^x(1+2^x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 6 = 2^x(1+2^x) \quad (1).$$

Θέτοντας στην (1) όπου $2^x = \psi > 0$ έχουμε: $6 = \psi(1+\psi) \Leftrightarrow \psi = 2$ δηλαδή $x=1$.

Παράδειγμα 6

Να λυθούν οι ανισώσεις : α) $\log_{\frac{1}{5}}(3^x + 2) < 2x \log_{\frac{1}{5}} 3$, β) $x^{\ln x} > e$.

Λύση

α) Καταρχήν η ανίσωση έχει νόημα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και γράφεται ισοδύναμα :

$$\log_{\frac{1}{5}}(3^x + 2) < \log_{\frac{1}{5}} 3^{2x} \Leftrightarrow 3^x + 2 < 3^{2x}, \text{ αφού } 0 < \frac{1}{5} < 1.$$

Θέτοντας όμως $3^x = \psi > 0$, έχουμε : $\psi + 2 > \psi^2 \Leftrightarrow \psi^2 - \psi - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < \psi < 2$.

Αλλά $\psi > 0$ άρα : $0 < \psi < 2 \Leftrightarrow 0 < 3^x < 2 \Leftrightarrow 3^x < 3^{\log_3 2} \Leftrightarrow x < \log_3 2$

β) Θα πρέπει καταρχήν να είναι $x > 0$. Η ανίσωση τότε γράφεται λογαριθμίζοντας και τα δυο μέλη της :

$$\ln(x^{\ln x}) > \ln e \Leftrightarrow \ln x \cdot \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln^2 x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln^2 x > 1 \Leftrightarrow |\ln x| > 1 \Leftrightarrow \ln x < -1 \text{ ή } \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-1} \text{ ή } \ln x > \ln e$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < e^{-1} \text{ ή } x > e .$$

Παράδειγμα 7

Να λυθούν οι ανισώσεις : α) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x + 1} > \left(\frac{25}{4}\right)^{2 - \log x^3}$, β) $\log_{x-3}(x^2 + 6x + 9) + \log_{3+x}(x^2 - 6x + 9) > 4$.

Λύση

α) Πρέπει $x > 0$. Έχουμε τότε :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x + 1} > \left(\frac{5^2}{2^2}\right)^{2 - \log x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x + 1} > \left(\frac{5}{2}\right)^{2(2 - \log x^3)} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x + 1} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-2(2 - \log x^3)}$$

Επειδή όμως $0 < \frac{2}{5} < 1$, έχουμε :

$$\log^2 x + 1 < -4 + 2 \log x^3 \Leftrightarrow \log^2 x - 2 \log x^3 + 5 < 0 \Leftrightarrow \log^2 x - 6 \log x + 5 < 0 \Leftrightarrow 1 < \log x < 5 \Leftrightarrow \log 10 < \log x < \log 10^5 \Leftrightarrow 10 < x < 10^5 .$$

β) Πρέπει $3-x > 0$ και $3-x \neq 0$ και $3+x > 0$ και $3+x \neq 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3)$ (1). Τότε :

$$\log_{x-3}(x+3)^2 + \log_{3+x}(x-3)^2 > 4 \Leftrightarrow 2 \log_{x-3}(x+3) + 2 \log_{3+x}(x-3) > 4 \Leftrightarrow$$

$$2 \frac{\log(x+3)}{\log(x-3)} + 2 \frac{\log(x-3)}{\log(x+3)} > 4 \Leftrightarrow \frac{\log(x+3)}{\log(x-3)} + \frac{\log(x-3)}{\log(x+3)} > 2 \Leftrightarrow \frac{\log^2(x+3) + \log^2(x-3) - 2 \log(x-3) \log(x+3)}{\log(x-3) \log(x+3)} > 0$$

$$\frac{(\log(x-3) - \log(x+3))^2}{\log(x-3) \log(x+3)} > 0 \Leftrightarrow \log(x-3) \log(x+3) > 0$$

$$\begin{cases} \log(x-3) > 0 = \log 1 \text{ ή } \log(x+3) > 0 = \log 1 \\ \log(x-3) < 0 = \log 1 \text{ ή } \log(x+3) < 0 = \log 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 1 \text{ ή } x+3 > 1 \\ x-3 < 1 \text{ ή } x+3 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -2 \end{cases} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχω : $x \in (-3, -2)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ “ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ”

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x$. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

- | | | |
|--|---|---|
| i. Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$. | Σ | Λ |
| ii. Η f έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} | Σ | Λ |
| iii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} | Σ | Λ |
| iv. Η f έχει άξονα συμμετρίας τον $\chi\chi$. | Σ | Λ |
| v. Η f έχει ασύμπτωτη του αρνητικού ημιάξονα των $y'y$ | Σ | Λ |
| vi. Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x) = 10^x$ ως προς την ευθεία $y = \chi$. | Σ | Λ |
| vii. Ισχύει ότι $f(2) < f(3)$ | Σ | Λ |
| viii. Το σημείο $(1,0)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f . | Σ | Λ |
| ix. Το σημείο $(0,1)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f . | Σ | Λ |
| x. Το σημείο $(10,1)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f . | Σ | Λ |

2. Ισχύει ότι:

- | | | |
|---|---|---|
| i. $\log x > \ln e$, για κάθε $x > 0$ | Σ | Λ |
| ii. $\log x^{-2} < \ln e^{-2}$ για κάθε $x > 0$ | Σ | Λ |
| iii. $\log 10^2 = 2$ | Σ | Λ |
| iv. $\ln e^3 = 3$ | Σ | Λ |

3. i. Αν $x < y$ τότε $\log x < \log y$

ii. Αν $x < y$ τότε $\ln x > \ln y$

iii. Αν $x < y$ τότε $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} y$

iv. Αν $x < y$ τότε $\log_3 x > \log_3 y$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$ τότε είναι :

- | | | |
|---|---|---|
| i. Οι γραφικές παραστάσεις των f και g είναι συμμετρικές ως την ευθεία $y = \chi$. | Σ | Λ |
| ii. Οι γραφικές παραστάσεις των f και g δεν τέμνονται. | Σ | Λ |
| iii. Οι γραφική παράσταση της f τέμνει τον $\chi\chi$ στο $(1,0)$. | Σ | Λ |
| iv. Η γραφική Παράσταση της g τέμνει τον $y'y$ στο $(0,1)$. | Σ | Λ |
| v. Ισχύει ότι $f(2) < g(2)$ | Σ | Λ |
| vi. Ισχύει ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) < g\left(\frac{1}{2}\right)$ | Σ | Λ |

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log \frac{1}{3} x$ είναι το διάστημα
Α. $[0, +\infty)$ Β. $(-\infty, 0)$ Γ. $(0, +\infty)$ Δ. \mathbb{R} Ε. $(-\infty, 0]$
2. Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln x$ είναι
Α. γνησίως αύξουσα Β. άρτια Γ. περιττή Δ. γνησίως φθίνουσα Ε. τίποτα από τα παραπάνω
3. Για την συνάρτηση με τύπο $f(x) = |\ln x|$ **δεν** ισχύει ότι
Α. έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$ Β. έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0, +\infty)$
Γ. έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$ Δ. είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ Ε. τέμνει τον άξονα $y'y$
4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = \log \frac{1}{2} x$ ως προς
Α. τον άξονα $y'y$. Β. το σημείο $(0, 0)$ Γ. την ευθεία $y = -x$ Δ. την ευθεία $y = x$ Ε. τον άξονα $x'x$
5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = e^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = \ln x$ ως προς
Α. τον άξονα $y'y$ Β. το σημείο $(0, 0)$ Γ. την ευθεία $y = x$ Δ. Την ευθεία $y = -x$ Ε. τον άξονα $x'x$.
6. Αν $\log_3 x = 4$ τότε το x είναι ίσο με
Α. 7 Β. 12 Γ. 64 Δ. 81 Ε. 9
7. Αν $\log_2 64 = x$ τότε το x είναι ίσο με
Α. 32 Β. 16 Γ. 128 Δ. 12 Ε. 6
8. Η παράσταση $3^{\log_3 5}$ είναι ίση με
Α. 1 Β. $\log 5$ Γ. 5 Δ. $\log 3$ Ε. 0
9. Η παράσταση $\log_a a$ με $0 < a \neq 1$ είναι ίση με
Α. a^2 Β. 1 Γ. a Δ. 0 Ε. 2^a
10. Η παράσταση $\log_a 1$ με $0 < a \neq 1$ είναι ίση με
Α. a^2 Β. 1 Γ. a Δ. 0 Ε. $2a$
11. Η παράσταση $\log 100^2$ είναι ίση με
Α. 4 Β. 2 Γ. 10 Δ. 100 Ε. 10.000
12. Η παράσταση $\log 2 + \log 7$ είναι ίση με

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Κεφάλαιο 5°
- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -

- A.** $\log 9$ **B.** $\log 14$ **Γ.** $\log \frac{7}{2}$ **Δ.** $\log 5$ **Ε.** $2\log 7$
- 13.** Η παράσταση $\log 12 - \log 3$ είναι ίση με
A. $\log 9$ **B.** $\log 15$ **Γ.** $\log 36$ **Δ.** $12\log 3$ **Ε.** $\log 4$
- 14.** Η παράσταση $\log 2^3$ είναι ίση με
A. $\log 6$ **B.** $\log 5$ **Γ.** $2\log 3$ **Δ.** $3\log 2$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα
- 15.** Η παράσταση $\frac{\log 2}{\log 3}$ είναι ίση με
A. $\log \frac{2}{3}$ **B.** $\log_2 3$ **Γ.** $\log_3 2$ **Δ.** $\log \frac{3}{2}$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα
- 16.** Η παράσταση $\frac{1}{2}\log 25 + \frac{1}{3}\log 8$ είναι ίση με
A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{6}\log 200$ **Γ.** $\frac{5}{6}\log 34$ **Δ.** 1 **Ε.** $\log 200$
- 17.** Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η
A. $\log_5 2 < \log_5 \frac{1}{2}$ **B.** $\log_5 2 \leq \log_5 \frac{1}{2}$ **Γ.** $\log_5 2 > \log_5 \frac{1}{2}$ **Δ.** $\log_5 2 = \log_5 \frac{1}{2}$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα
- 18.** Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η
A. $\log_{\frac{1}{3}} 5 < \log_{\frac{1}{3}} 7$ **B.** $\log_{\frac{1}{3}} 5 \leq \log_{\frac{1}{3}} 7$ **Γ.** $\log_{\frac{1}{3}} 5 = \log_{\frac{1}{3}} 7$ **Δ.** $\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{3}} 7$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα
- 19.** Ο $\log(4-x^2)$ ορίζεται αν
A. $x > 2$ **B.** $-2 < x < 2$ **Γ.** $x < -2$ **Δ.** $x = 2$ **Ε.** $x = -2$
- 20.** Ο $\log|x-1|$ **δεν** ορίζεται αν
A. $x > 1$ **B.** $x \neq 1$ **Γ.** $-1 < x < 1$ **Δ.** $x < -1$ **Ε.** $x = 1$
- 21.** Η συνάρτηση $f(x) = \log(x-6) + \log(7-x)$ ορίζεται αν
A. $x = 6$ **B.** $x < 6$ **Γ.** $x > 7$ **Δ.** $x = 7$ **Ε.** $6 < x < 7$
- 22.** Αν $\log[\log(x-2)] = 0$ τότε το x είναι ίσο με
A. 12 **B.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 4 **Ε.** 10
- 23.** Αν $\log \theta = 1,62$ τότε ο θ ανήκει στο διάστημα
A. $(0,1)$ **B.** $(1,2)$ **Γ.** $(2,5)$ **Δ.** $(5,10)$ **Ε.** $(10,100)$
- 24.** Αν ισχύει $\log(\eta\mu\chi) = 0$ τότε είναι

A. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ B. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ Γ. $x = 2k\pi$ Δ. $x = 2k\pi + \pi$ Ε. $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

1. Στη στήλη Α υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις κάποιων από τις συναρτήσεις που ο τύπος τους αναγράφεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
	$f_1(x) = \log x$ $f_2(x) = \ln x$ $f_3(x) = \log_2 x + 1$ $f_4(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ $f_5(x) = \log_{\frac{1}{4}} x - 1$

2. Κάθε ισότητα της στήλης Α ισοδυναμεί με μια ισότητα της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
<ol style="list-style-type: none"> 1. $\log_a 3 = 8$ 2. $\log_8 a = 3$ 3. $\ln x = 1 + \omega$ 4. $\omega \ln x = 1$ 	<p>A. $a^8 = 3$</p> <p>B. $\omega = e^x$</p> <p>Γ. $x^\omega = e$</p> <p>Δ. $a = 8^3$</p> <p>Ε. $x = e^{\omega+1}$</p> <p>ΣΤ. $a = 3^8$</p>

3. Στη στήλη Α υπάρχουν αναπτύγματα και στη στήλη Β κάποιες παραστάσεις.

Στήλη Α	Στήλη Β
<ol style="list-style-type: none"> 1. $\log 4 - \log x + 2 \log y$ 2. $\log a + 2 \log b - \log \gamma$ 3. $\ln x - 2 \ln y + 2$ 	<p>A. $\log \left(\frac{4y^2}{x} \right)$</p> <p>B. $\ln \left(\frac{x e^2}{y^2} \right)$</p> <p>Γ. $\ln \left(\frac{2x}{y^2} \right)$</p> <p>Δ. $\ln [(x + e)(e - x)]$</p> <p>Ε. $\log \left(\frac{\alpha \beta^2}{\gamma} \right)$</p>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Εάν α, β, γ τρεις διαφορετικοί ανά δυο αριθμοί και ισχύει : $\frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta}$, να δείξετε τότε ότι :
 $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = 1$.
2. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_n) με θετικούς όρους έχουμε $\alpha_\lambda = \alpha$, $\alpha_\mu = \beta$ και $\alpha_\kappa = \gamma$. Να αποδείξετε ότι :
 $(\mu - \kappa) \log \alpha + (\kappa - \lambda) \log \beta + (\lambda - \mu) \log \gamma = 0$.
3. Να υπολογιστεί ο λογάριθμος $\log_9 6$ εάν είναι γνωστό ότι $\log_3 2 = \alpha$.
4. Να δείξετε ότι : i. $2 \log_{11} \frac{3}{2} + \log_{11} \frac{7}{5} - \log_{11} \frac{42}{25} - \log_{11} \frac{15}{8} = 0$ ii. $\frac{\log \sqrt{343} + \log \sqrt{125} - \log \sqrt{27}}{\log 5 + \log 7 - \log 3} = \frac{3}{2}$.
5. Να δείξετε ότι : $\log_\alpha \theta \cdot \log_{\frac{1}{\alpha}} \theta \cdot \log_{\frac{1}{\alpha^3}} \theta = \frac{1}{3} (\log_\alpha \theta)^3$
6. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha, \beta, \gamma \neq 1$ και ισχύει $\frac{1}{\log_\alpha \theta} + \frac{1}{\log_\beta \theta} - \frac{2}{\log_\gamma \theta} = 0$, να δείξετε τότε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής πρόοδου.
7. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha, \beta, \gamma \neq 1$ και $\chi = \log_\alpha \beta$, $\psi = 2 \log_\beta \gamma$, $z = 3 \log_\gamma \alpha$ να δείξετε τότε ότι ισχύει η σχέση $\alpha^{\chi-3} \cdot \beta^{\psi-1} \cdot \gamma^{z-2} = 1$.
8. Έστω (α_n) μια αριθμητική πρόοδος για την οποία γνωρίζουμε ότι $\alpha_1 = \log_2 3$ και $\alpha_2 = \log_2 243$ να δείξετε τότε ότι $S_n = n(2n-1) \log_2 3$.
- 9.* Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε να ισχύει: $\log x + \log x^3 + \log x^5 + \dots + \log x^{2n-1} = 2n^2$
- 10.* Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο (α_n) ισχύει $\alpha_\rho = k \cdot \alpha_1$, όπου ο α_ρ ο όρος τάξεως ρ , α ο πρώτος της όρος, και λ ο λόγος της να αποδείξετε ότι: $(\rho - 1) \log \lambda = \log k$
- 11.* Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_2 \frac{x-2}{x(x-1)} - \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot [\log_{\frac{1}{2}} (x-1)]$.
- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \log_2 \frac{(x-2)(x-1)}{x}$
- iii. Να λύσετε ως προς $\lambda \in \mathbb{R}$ την εξίσωση: $2\lambda f(4) = \log_2 3^{\lambda-2} + (2-\lambda) \cdot \log_2 2$.
12. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$.
- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να βρεθεί εάν είναι άρτια ή περιπτή ,
- ii. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha) + f(\beta) = f \left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha \cdot \beta} \right)$.

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Κεφάλαιο 5ο

- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -

13. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει νόημα ο $\log_a[(\lambda-1)x^2-4x+2]$ με $0 < a \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

14. Βρείτε το πεδίο της συνάρτησης $f(x) = \log_{2-x}(x^2-3x+2)$.

15.* Να βρείτε: i. τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της $f(x) = \log_2(x+1) - 2$

ii. Το κ ώστε το σημείο $\left(\frac{\kappa-2}{\kappa+1}\right)^+$ να ανήκει στη γραφική της παράσταση.

16. Να λυθούν οι εξισώσεις: i. $\log_5(3x+2) - \log_5(x+1) = \log_5 2$

ii. $\log(x-1) + \log(x+2) = 2(1 - \log 5)$

iii. $\log_2(x^2 - x) = 1 + \log_2(x - 1)$

17.* Να λύσετε τις εξισώσεις: i. $\log(1+x) = \log(1-x)$

ii. $\log(1+x) = 1 + \log(1-x)$

iii. $\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1}) = \ln(x^2 + 1)$

iv. $2\log(2x - 1) - \log(3x - 2x^2) = \log(4x - 3) - \log x$

v. $\ln \frac{x}{2} = \frac{\ln x}{2}$

vi. $x(\log 10 - \log 5) = \log(4x - 12)$

vii. $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$

viii. $\frac{\log_2(9 - 2^x)}{3 - x} = 1$.

18. Να λυθούν οι εξισώσεις: i. $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

ii. $x \log 5 - \log(1 + 2^x) = x - \log 6$

iii. $\log(4x - 8) = \log 7 + x \log 2$

iv. $\log(5^x - 2 \cdot 3^x) + \log 27 = \log 71 + x \log 3$

v. $\log_2(4x + 17) = 3 + \log_2(5 \cdot 4^{x-1} + 1)$

vi. $\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 = x \log 3 + \log 178$.

19. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις: i. $\log(x-5) + \log(x+10) = 2$

ii. $\log(\sqrt{x+1} + 1) = \log(x - 40)$

iii. $\ln 2 + \ln |\eta \mu x| + \ln |\sigma \nu x| = 0$.

20. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις: i. $2^{\log x} + 3 \cdot 4^{\log x} = 52$

ii. $(\log_x 5 + 2) \log_5^2 x = 1$

21.* Να λύσετε τις εξισώσεις: i. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

ii. $\log_2(\log_2 x) = \log_4(\log_4 x)$

iii. $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις: i. $\log[1 + \log(10^{x-1} + 2)] = \log 2 + \log x$

ii. $\ln(\ln x + 4) = 8 \ln x - 3$

iii. $\log[\log(2x^2 + x - 11)] = 0$

23.* Να λυθεί η εξίσωση: $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$.

24. Να λυθούν οι εξισώσεις: i. $(5x)^{\log_2 5 + \log_2 \sqrt{x}} = 256$

ii. $\frac{\log 10^{x-1} - 2}{2} + \frac{1}{\log 10^{x-1} - 1} = 1$

iii. $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$.

25. Να λυθεί η εξίσωση: $\varphi(x) + \varphi(x^{-1}) = \frac{10}{3}$ όπου $\varphi(x) = \frac{2 \log x + 1}{2 \log x - 1}$.

26.* i. Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log \sqrt{3}}$. ii. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2 \log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log \sqrt{3}} = 0$.

27.* Αν σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) ο πρώτος όρος είναι $a_1 = \log_3 3$ και ο δεύτερος όρος της είναι $a_2 = \log_3 81$.

i. Να βρείτε την διαφορά ω της αριθμητικής πρόοδου.

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Κεφάλαιο 5ο

- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log_{\omega} X^3} - 9 \cdot 3^{\log_{\omega} X^2} - 9 \cdot 3^{\log_{\omega} X} + 81 = 0$.

28.* i. Να αποδείξετε ότι: $3^{\log X} = X^{\log 3}$ ii. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log X} = 54 - X^{\log 3}$.

29.* i. Να αποδείξετε ότι: $X^{\log_5 2} = 2^{\log_5 X}$ αν $0 < X \neq 1$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $3X^{\log_5 2} + 2^{\log_5 X} = 64$

iii. Να αποδείξετε ότι ισχύει γενικά $a^{\log_b \gamma} = \gamma^{\log_b a}$ με $(0 < a, \beta, \gamma \neq 1)$

30.* Να λύσετε την εξίσωση $\ln(\sin x) = 0$.

31. Να λυθούν οι ανισώσεις : i. $\log_{\frac{1}{5}}(3^X + 2) < 2X \log_{\frac{1}{5}} 3$ ii. $X^{\ln X} > e$

iii. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 X + 1} > \left(\frac{25}{4}\right)^{2 - \log X^3}$ iv. $\log_{X-3}(X^2 + 6X + 9) + \log_{3+X}(X^2 - 6X + 9) > 4$.

32. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις : i. $\log_2(9-2^X) < 3-X$ (δίνεται $\log_2 9 = 3, 16$) ii. $\log_2\left(\frac{X+1}{X-2}\right) < 1$

iii. $\log \sqrt{X-1} < \log X$ iv. $\log \left[\log \left(\frac{3X+3}{X-6} \right) \right] < 0$ v. $\log \left(\log \frac{13X-25}{X-1} \right) < 0$.

33. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις : i. $100^{\frac{1}{2} \log(X^2 - 5X + 7)} > 1$ ii. $(0,4)^{\log^2 X + 1} \leq (6,25)^{2 - \log X^3}$.

34. Να λυθούν οι ανισώσεις : i. $\log_3(X-2) - \log_{\frac{1}{3}}(X-3) > 0$ ii. $\log_{\frac{25-X^2}{16}} \left(\frac{12-X-\frac{1}{2}X^2}{7} \right) > 1$.

35.* i. Να αποδείξετε ότι $X^{\log Y} = Y^{\log X}$ με $x, y > 0$

ii. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} X^{\log Y} + Y^{\log X} = 20 \\ \log \sqrt{X \cdot Y} = 1 \end{cases}$$

iii. Αν οι λύσεις του (ii) είναι ρίζες της εξίσωσης: $\log[\log(X^2 + X \log \theta - 110)] = 0$ να βρείτε το $\theta \in \mathbb{R}_+$

36.* Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που οι φυσικοί τους λογάριθμοι έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -8.

37. Να λυθούν τα συστήματα :

i.
$$\begin{cases} \log X + \log Y = \log 3 \\ \log 2X - \log \frac{Y}{X} = \log 2 \end{cases}$$
 ii.
$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 425 \\ \log X + \log Y = 2 \end{cases}$$

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΑΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ Κεφάλαιο 5ο
- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -

$$\text{iii. } \begin{cases} x^{\log y + 1} = y^{\log x + 2} \\ y^{\sqrt{x+2}} = x^{y-2} \end{cases} \quad \text{iv. } \begin{cases} \log_3 x = \log_9 (y - x) \\ 1 + \log_9 x = \log_3 (x + y) \end{cases}$$

$$\text{v. } \begin{cases} x + 2\sqrt{y^{\log y}} = 10.000 \\ \log y \sqrt{5^{4x}} = 25 \end{cases}$$