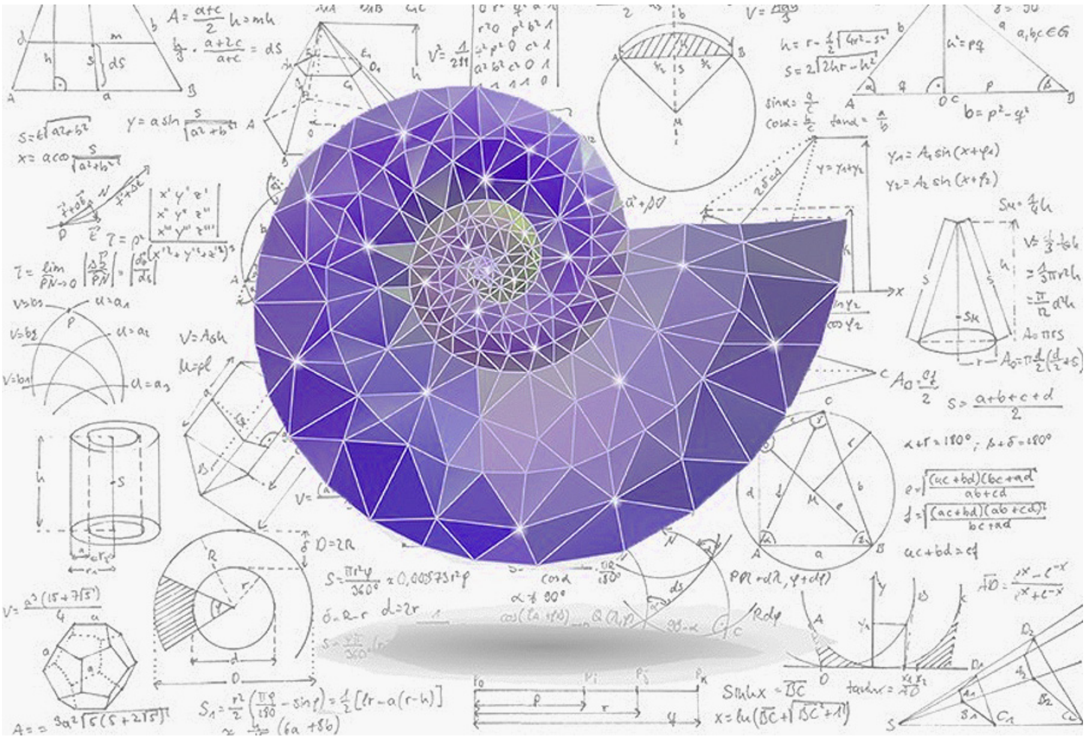
ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ



XASIM TEAM 2020

ΚΑΛΗ ΣΑΣ ΜΕΛΕΤΗ

(ΤΟ 1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΙΝΑΙ ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

§1.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ
§1.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

1) ΑΣΚΗΣΗ 2-497 §1.1-§1.2

Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος. 10)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

Α : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης .

Β : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.

Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης. 15)

2) ΑΣΚΗΣΗ 2-499 §1.1-§1.2

Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

Α: «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

Β: «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»,

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ **ii)** $A \cap B$ **iii)** $B - A$ **iv)** A' 12)

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων

i) ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου.

ii) ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. 13)

3) ΑΣΚΗΣΗ 2-1003 §1.1-§1.2

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ

Κ: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ

Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

α) Χρησιμοποιώντας τα Α, Κ και Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i. Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη,

ii. Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη. 13)

β) Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (α). 12)

4) ΑΣΚΗΣΗ 2-1102 §1.1-§1.2

Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες:

$$P(A)=\frac{3}{4}\ ,\ P(A-B)=\frac{5}{8}\ \text{και}\ P(B)=\frac{1}{4}$$

α) Να υπολογίσετε την $P(A\cap B)$ 9)

β) **i)** Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: «Α ή Β». 7)

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου. 9)

5) ΑΣΚΗΣΗ 2-1287 §1.1-§1.2

Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα. Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:

Α: ο διψήφιος να είναι άρτιος 7)

Β: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3 9)

Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3 9)

6) ΑΣΚΗΣΗ 2-1506 §1.1-§1.2

Δίνεται το σύνολο $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ και τα υποσύνολά του $A=\{1,2,4,5\}$ και $B=\{2,4,6\}$.

α) Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn, με βασικό σύνολο το Ω, τα σύνολα Α και Β. Κατόπιν, να προσδιορίσετε τα σύνολα $A\cup B$, $A\cap B$, A' και B'. 13)

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α. 4)

ii) Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β. 4)

iii) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β. 4)

7) ΑΣΚΗΣΗ 2-1520 §1.1-§1.2

Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο

Β: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:

α) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα. 12)

β) Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα. 13)

8) ΑΣΚΗΣΗ 2-3383 §1.1-§1.2

Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο

Μ: ο κάτοικος να έχει μηχανάκι.

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα: **i)** $A \cup M$ **ii)** $M - A$ **iii)** M' 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε:

i) Να μην έχει μηχανάκι. 7)

ii) Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο. 9)

9) ΑΣΚΗΣΗ 2-3384 §1.1-§1.2

Από τους 180 μαθητές ενός λυκείου, 20 μαθητές συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, 30 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου, ενώ 10 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

Β: ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα: **i)** $A \cup B$ **ii)** $B - A$ **iii)** A' 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:

i) Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. 9)

ii) Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου. 7)

10) ΑΣΚΗΣΗ 2-3878 §1.1-§1.2

Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α΄ τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ΄ τάξης είναι 20%. Να βρείτε:

α) Το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης. 10)

β) Το πλήθος των μαθητών της Β΄ τάξης. 5)

γ) Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β΄ τάξης. 10)

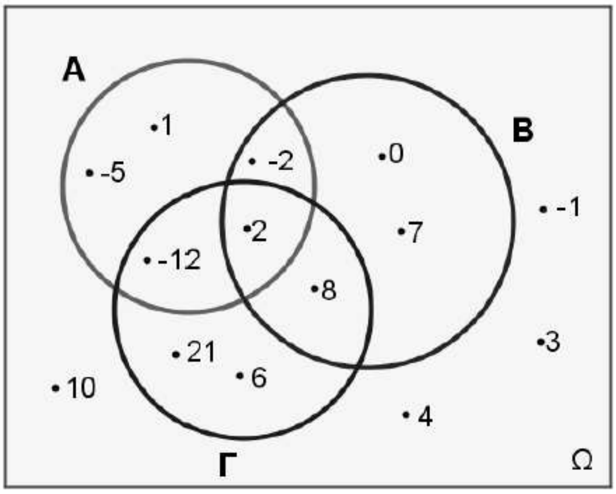
11) ΑΣΚΗΣΗ 2-13096 §1.1-§1.2

α) Αν Α, Β, Γ είναι τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα, να διατυπώσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ **ii)** $B \cap \Gamma$

iii) $(A \cap B) \cap \Gamma$ **iv)** A' 12)

β) Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ο παραπάνω δειγματικός χώρος Ω και τα τρία ενδεχόμενα Α, Β και Γ αυτού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του (α) ερωτήματος. 13)



ΘΕΜΑ 4ο

12) ΑΣΚΗΣΗ 4-1868 §1.1-§1.2

Σε ένα τμήμα της Α’ Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα Αγγλικών και κάποιοι Γαλλικών. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι 0,8. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί Γαλλικά. Τέλος, η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες είναι 0,9.

α) Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη.

i) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών; (Μονάδες 9)

ii) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες; (Μονάδες 9)

β) Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά, πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος; (Μονάδες 7)

13) ΑΣΚΗΣΗ 4-1936 §1.1-§1.2

Η εξέταση σε ένα διαγωνισμό των Μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα τα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να βαθμολογηθούν με άριστα έπρεπε να απαντήσουν και στα δύο θέματα, ενώ για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα. Στο διαγωνισμό εξετάσθηκαν 100 μαθητές. Στο πρώτο θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές. Στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές, ενώ και στα δύο θέματα απάντησαν σωστά 30 μαθητές. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα) τα παραπάνω δεδομένα. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

i) Να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα.

ii) Να βαθμολογηθεί με άριστα.

iii) Να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.

iv) Να πέρασε την εξέταση. (Μονάδες 12)

14) ΑΣΚΗΣΗ 4-2064 §1.1-§1.2

Σε μια ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες και 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:

i) να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι. (Μονάδες 6)

ii) να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι. (Μονάδες 13)

15) ΑΣΚΗΣΗ 4-2073 §1.1-§1.2

Οι δράστες μιας κλοπής διέφυγαν μ’ ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2. Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο του ήταν 4 ή 7.

α) Με χρήση δενδροδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

Α: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.

Β: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.

Γ: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε 8 ούτε 9.

(Μονάδες 12)

16) ΑΣΚΗΣΗ 4-2080 §1.1-§1.2

Από μια έρευνα μεταξύ μαθητών ενός Λυκείου της χώρας, προέκυψε ότι το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής πίνει γάλα

Β: ο μαθητής τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

Αν από το σύνολο των μαθητών το 60% πίνει γάλα και το 45% τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι,

α) Να ορίσετε με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα ενδεχόμενα:

- **i)** ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα ούτε να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι
- **ii)** ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι
- **iii)** ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)

17) ΑΣΚΗΣΗ 4-6144 §1.1-§1.2

Μια ημέρα, στο τμήμα Α1 ενός Λυκείου, το $\frac{1}{4}$ των μαθητών δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία, ενώ το $\frac{1}{3}$ των μαθητών έχει διαβάσει και τα δύο αυτά μαθήματα. Η καθηγήτρια των μαθηματικών επιλέγει τυχαία ένα μαθητή για να τον εξετάσει. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής να έχει διαβάσει Άλγεβρα

Γ: ο μαθητής να έχει διαβάσει Γεωμετρία

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα δεδομένα του προβλήματος. 9)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

- **i)** να έχει διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα
- **ii)** να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα δυο μαθήματα. 8)

γ) Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι οι μισοί από τους μαθητές έχουν διαβάσει Γεωμετρία, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:

- **i)** να έχει διαβάσει Γεωμετρία
- **ii)** να έχει διαβάσει Άλγεβρα. 8)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

ΘΕΜΑ 2ο

1) ΑΣΚΗΣΗ 2-1070 §2.1

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν: $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}=4$ και $\dfrac{\gamma}{\delta-\gamma}=\dfrac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$. 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$ 15)

2) ΑΣΚΗΣΗ 2-1080 §2.1

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\dfrac{4x+5y}{x-4y}=-2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y=2x$ 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$ 13)

3) ΑΣΚΗΣΗ 2-3874 §2.1

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α,β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει: $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{\alpha^{22}\cdot\left(\beta^3\right)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$ 12)

§2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΘΕΜΑ 2ο

4) ΑΣΚΗΣΗ 2-486 §2.2

Αν $0<\alpha<1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3<\alpha$ 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0\ ,\ \alpha^3\ ,\ 1\ ,\ \alpha\ ,\ \frac{1}{\alpha}$$ 12)

5) ΑΣΚΗΣΗ 2-487 §2.2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$$ 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x,y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ 13)

6) ΑΣΚΗΣΗ 2-506 §2.2

Αν $2\le x\le 3$ και $1\le y\le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

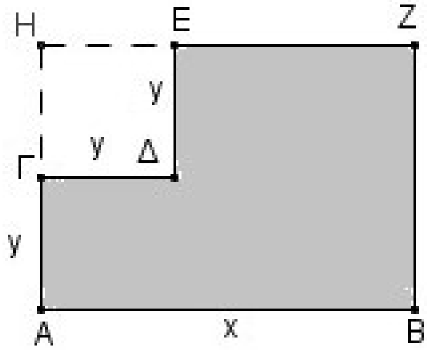
α) $x+y$ 5)

β) $2x-3y$ 10)

γ) $\dfrac{x}{y}$ 10)

7) ΑΣΚΗΣΗ 2-1092 §2.2

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.



α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi=2x+4y$ 10)

β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. 15)

8) ΑΣΚΗΣΗ 2-1541 §2.2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\le x\le 7$ και $2\le y\le 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. 10)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. 15)

9) ΑΣΚΗΣΗ 2-3852 §2.2

Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύουν: $2\le \alpha\le 4$ και $-4\le \beta\le -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha-2\beta$ 12)

β) $\alpha^2-2\alpha\beta$ 13)

10) ΑΣΚΗΣΗ 2-3870 §2.2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K-\Lambda=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$ 3)

β) Να δείξετε ότι: $K\ge\Lambda$, για κάθε τιμή των α,β. 10)

γ) Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 12)

11) ΑΣΚΗΣΗ 2-4299 §2.2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \le x \le 5$ και $-2 \le y \le -1$, , να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ 12)

β) $x^2 + y^2$ 13)

12) ΑΣΚΗΣΗ 2-7519 §2.2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α,β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \ge 4\alpha$ 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \ge 16$ 13)

13) ΑΣΚΗΣΗ 2-13152 §2.2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K \ge \Lambda$, για κάθε τιμή των α,β. 12)

β) Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 13)

§2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΘΕΜΑ 2ο

14) ΑΣΚΗΣΗ 2-504 §2.3

α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \le -2$ 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \ge 2$ 10)

15) ΑΣΚΗΣΗ 2-509 §2.3

α) Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \ge 2$ 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 10)

16) ΑΣΚΗΣΗ 2-991 §2.3

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,

α) να δείξετε ότι $x \in (-3,1)$ 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x. 13)

17) ΑΣΚΗΣΗ 2-996 §2.3

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$ με x,y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$ 12)

β) $0<A<4$ 13)

18) ΑΣΚΗΣΗ 2-1009 §2.3

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x\geq 2$, $A=3x-4$

ii. για κάθε $x<2$, $A=8-3x$ 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x\geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\dfrac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$ 13)

19) ΑΣΚΗΣΗ 2-1062 §2.3

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$. 12)

β) Αν x,y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου. 13)

20) ΑΣΚΗΣΗ 2-1074 §2.3

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$. 12)

β) Αν x,y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. 13)

21) ΑΣΚΗΣΗ 2-1089 §2.3

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5<x<10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές. 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{|x-5|}{x-5}+\dfrac{|x-10|}{x-10}$ 15)

22) ΑΣΚΗΣΗ 2-1091 §2.3

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

23) ΑΣΚΗΣΗ 2-1273 §2.3

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν: $|x-3|\leq 2$ και $|y-6|\leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1\leq x\leq 5$ και $2\leq y\leq 10$. 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y. (Μονάδες 13)

24) ΑΣΚΗΣΗ 2-3884 §2.3

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$

α) Να αποδείξετε ότι: $x\le\frac{3}{2}$. 12)

β) Αν $x\le\frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x. 13)

25) ΑΣΚΗΣΗ 2-4290 §2.3

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$ 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}$ 13)

26) ΑΣΚΗΣΗ 2-4295 §2.3

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$

α) Να αποδείξετε ότι: $y\in(1,3)$ 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|y-1|+|y-3|}{2}$ 13)

27) ΑΣΚΗΣΗ 2-4318 §2.3

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<x<1$ 15)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 1 , x , x^2 . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 10)

28) ΑΣΚΗΣΗ 2-7521 §2.3

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x|<5$ και 9)

ii) $|1-2x|\ge 1$ 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. 7)

ΘΕΜΑ 4ο

29) ΑΣΚΗΣΗ 4-2287 §2.3

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5)\le 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x. (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:
$|x+4|+|x-14|=18$ (Μονάδες 5)

<u>30) ΑΣΚΗΣΗ 4-2301</u> §2.3

Δίνονται τα σημεία Α, Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:
$|x+2|+|x-7|$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

<u>31) ΑΣΚΗΣΗ 4-2302</u> §2.3

Σε έναν άξονα τα σημεία Α, Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5 , 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.
(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

<u>32) ΑΣΚΗΣΗ 4-7791</u> §2.3

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha-1)(1-\beta)>0$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α,β. 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$K=|\alpha-1|+|1-\beta|$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε, γεωμετρικά είτε αλγεβρικά 12)

<u>33) ΑΣΚΗΣΗ 4-8453</u> §2.3

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει: • $|\alpha-2|<1$ • $|\beta-3|\leq 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$ 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β. 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$. 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$. 9)

§2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΘΕΜΑ 2ο

34) ΑΣΚΗΣΗ 2-936 §2.4

Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. 13)

35) ΑΣΚΗΣΗ 2-938 §2.4

α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$. 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$ 13)

36) ΑΣΚΗΣΗ 2-944 §2.4

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$ 12)

37) ΑΣΚΗΣΗ 2-947 §2.4

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. 12)

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\cdot\left(10-\sqrt{5}\right)$ 13)

38) ΑΣΚΗΣΗ 2-950 §2.4

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. 13)

β) Αν $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$ 12)

39) ΑΣΚΗΣΗ 2-952 §2.4

Δίνεται η παράσταση: $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος. 13)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$ 12)

40) ΑΣΚΗΣΗ 2-955 §2.4

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$ 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$ 12)

41) ΑΣΚΗΣΗ 2-1276 §2.4

Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. 12)

β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. 13)

42) ΑΣΚΗΣΗ 2-1300 §2.4

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$, $B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$, $\Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$ 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 12)

43) ΑΣΚΗΣΗ 2-4311 §2.4

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\le 2$, ισχύει $A=B$. 10)

44) ΑΣΚΗΣΗ 2-4314 §2.4

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot\Gamma=\sqrt{15}$ 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α,Β. 10)

45) ΑΣΚΗΣΗ 2-4316 §2.4

Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$, $B=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$. 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=A^2+B^2$. 13)

46) ΑΣΚΗΣΗ 2-8173 §2.4

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις): $\sqrt{2}\cong 1{,}41$, $\sqrt{3}\cong 1{,}73$, $\sqrt{5}\cong 2{,}24$, $\sqrt{7}\cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;

13)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΜΑ 2ο

1) ΑΣΚΗΣΗ 2-485 §3.1

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:
$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 9)

2) ΑΣΚΗΣΗ 2-507 §3.1

Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2 - 9\right)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρείς εξισώσεις. 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση. 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4. 10)

3) ΑΣΚΗΣΗ 2-1055 §3.1

Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2 - 1\right)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$. 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 13)

4) ΑΣΚΗΣΗ 2-2702 §3.1

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$ όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \le x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$. 16)

β) Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 9)

5) ΑΣΚΗΣΗ 2-3382 §3.1

Δίνεται η παράσταση: $A = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A = 4$. 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + A| = 1$. 13)

6) ΑΣΚΗΣΗ 2-4302 §3.1

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha=1$ 5)

ii) όταν $\alpha=-3$ 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. 12)

§3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^\nu=\alpha$
§3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΜΑ 2ο

7) ΑΣΚΗΣΗ 2-481 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. 8)

γ) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$. 9)

8) ΑΣΚΗΣΗ 2-483 §3.2-§3.3

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$ 12)

β) Αν α,β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+3=0$. 13)

9) ΑΣΚΗΣΗ 2-493 §3.2-§3.3

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$ 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. 15)

10) ΑΣΚΗΣΗ 2-496 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+4(\lambda-1)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. 8)

γ) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $(x_1+x_2)^2+x_1\cdot x_2+5=0$ 9)

11) ΑΣΚΗΣΗ 2-1005 §3.2-§3.3

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\dfrac{1+x}{x-1}$ και $B=\dfrac{2}{x^2-x}$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις Α, Β πρέπει: $x\neq 1$ και $x\neq 0$ 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A=B$. 13)

12) ΑΣΚΗΣΗ 2-1007 §3.2-§3.3

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2+10x=12$ 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$ 10)

13) ΑΣΚΗΣΗ 2-1067 §3.2-§3.3

Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$. 10)

β) Για ποιες τιμές του $x\in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Κ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ. 8)

14) ΑΣΚΗΣΗ 2-1093 §3.2-§3.3

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$ και $B=\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B=\dfrac{1}{2}$ 8)

ii) $A\cdot B=\dfrac{1}{20}$ 8)

15) ΑΣΚΗΣΗ 2-1097 §3.2-§3.3

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2+\lambda x-5$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0=1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ. 12)

β) Για $\lambda=3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. 13)

16) ΑΣΚΗΣΗ 2-1275 §3.2-§3.3

Δίνεται το τριώνυμο: $2x^2+5x-1$

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: x_1+x_2, $x_1\cdot x_2$ και $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$. 10)

17) ΑΣΚΗΣΗ 2-1281 §3.2-§3.3

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$ 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. 13)

18) ΑΣΚΗΣΗ 2-1282 §3.2-§3.3

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2-2x-1$. 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση:

$A(x)=\frac{x-1}{3x^2-2x-1}$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε. 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $|A(x)|=1$ 8)

19) ΑΣΚΗΣΗ 2-1298 §3.2-§3.3

Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \text{ και } \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$. 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β και να τους βρείτε. 15)

20) ΑΣΚΗΣΗ 2-1509 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ. 13)

β) Για $\lambda=1$ να λύσετε την εξίσωση (1) 12)

21) ΑΣΚΗΣΗ 2-3839 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2-(\lambda-1)x-1=0$, με παράμετρο $\lambda\neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό –2. 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\neq 0$. 13)

22) ΑΣΚΗΣΗ 2-3857 §3.2-§3.3

Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha\cdot\beta=4$ και $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta=5$. 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β, και να τους βρείτε. 15)

23) ΑΣΚΗΣΗ 2-3863 §3.2-§3.3

Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha+\beta=-1$ και

$\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$. 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β και να τους βρείτε. 15)

24) ΑΣΚΗΣΗ 2-4308 §3.2-§3.3

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \dfrac{2x^2-1}{x^2-x} + \dfrac{1}{1-x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{2x^2-1}{x^2-x} + \dfrac{1}{1-x} = 0$ 15)

25) ΑΣΚΗΣΗ 2-4309 §3.2-§3.3

Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20$ cm και εμβαδόν $E = 24$ cm^2.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου. 15)

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. 10)

26) ΑΣΚΗΣΗ 2-4310 §3.2-§3.3

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α,β, τέτοιοι ώστε: $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -64$. 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α,β. 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α,β. 7)

27) ΑΣΚΗΣΗ 2-4313 §3.2-§3.3

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B = \dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \dfrac{1}{2}$ 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς Α,Β. 13)

28) ΑΣΚΗΣΗ 2-13073 §3.2-§3.3

Το πάτωμα του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x+1)$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος. 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του. 15)

29) ΑΣΚΗΣΗ 2-13153 §3.2-§3.3

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - \kappa x - 2$, με $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε κ∈IR, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.
13)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).
6)

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$.
12)

ΘΕΜΑ 4ο

30) ΑΣΚΗΣΗ 4-1955 §3.2-§3.3

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $t_A < t_B$, $t_\Gamma = \dfrac{t_A + 2t_B}{3}$ και $|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$.

α) i) Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$ (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει: $t_A + t_B = 6$ και $t_A \cdot t_B = 8$

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B
(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών. (Μονάδες 5)

31) ΑΣΚΗΣΗ 4-2055 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο λ∈IR

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ∈IR, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.
(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ∈IR που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ∈IR που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)

32) ΑΣΚΗΣΗ 4-2332 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο λ∈IR.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ∈IR, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.
(Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.
(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,
ii) να βρείτε το λ. (Μονάδες 10)

33) ΑΣΚΗΣΗ 4-4551 §3.2-§3.3

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda$, $\lambda\in$IR–{0}

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in$IR–{0} (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda<0$, τότε:
i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)
ii) να αποδείξετε ότι $\left|x_1+x_2\right|\geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (Μονάδες 6)

34) ΑΣΚΗΣΗ 4-4558 §3.2-§3.3

Δίνεται το τριώνυμο: $f\left(x\right)=\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda$, με $\lambda>0$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda>0$. (Μονάδες 10)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:
i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)
ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 4$ για κάθε $\lambda>0$. (Μονάδες 8)
iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

35) ΑΣΚΗΣΗ 4-4654 §3.2-§3.3

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4-7x^2+12=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους $\beta,\gamma\in$IR. Να δείξετε ότι: Αν $\beta<0$, $\gamma>0$ και $\beta^2-4\gamma>0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

36) ΑΣΚΗΣΗ 4-4659 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2-5x+\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $\left|\alpha\right|\leq\frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha=2$. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$ (Μονάδες 10)

37) ΑΣΚΗΣΗ 4-4665 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\lambda x-(\lambda^2+5)=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in IR$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in IR$. 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in IR$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1-2)(x_2-2)=-4$. 10)

38) ΑΣΚΗΣΗ 4-4667 §3.2-§3.3

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-3x-4=0$ (1). 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α,β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β. 8)

39) ΑΣΚΗΣΗ 4-4681 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in IR$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in IR$ 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; 6)

γ) Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1,x_2)=\frac{1}{d(x_1,x_2)}$ 9)

40) ΑΣΚΗΣΗ 4-4833 §3.2-§3.3

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση: $\lambda=(2x+5)^2-8x$ (1)

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το –5, ποιος είναι ο εξαγόμενος; 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος; 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2+12x+(25-\lambda)=0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ. 7)

41) ΑΣΚΗΣΗ 4-4835 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\beta x+\gamma=0$ με β,γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1+x_2|=4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β. 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. 12)

42) ΑΣΚΗΣΗ 4-4857 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$, όπου α,β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + \beta^2)^2$. 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α,β, έτσι ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α,β. 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4$. 7)

43) ΑΣΚΗΣΗ 4-4903 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathrm{IR} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ. 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 .. 10)

44) ΑΣΚΗΣΗ 4-4957 §3.2-§3.3

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathrm{IR} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathrm{IR} - \{0\}$. 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. 6)

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$. 6)

45) ΑΣΚΗΣΗ 4-4962 §3.2-§3.3

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathrm{IR} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathrm{IR} - \{0\}$. 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνεται τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1. 6)

46) ΑΣΚΗΣΗ 4-4970 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. 8)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$ 7)

ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$. 4+6=10)

47) ΑΣΚΗΣΗ 4-4975 §3.2-§3.3

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε:

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$. 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. 12)

48) ΑΣΚΗΣΗ 4-4992 §3.2-§3.3

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60$ cm^2. 5)

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. 5)

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm. 10)

49) ΑΣΚΗΣΗ 4-5317 §3.2-§3.3

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. 10)

β) Να κατασκευάσετε μια διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε. 15)

50) ΑΣΚΗΣΗ 4-6223 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$. 9)

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$ 9)

51) ΑΣΚΗΣΗ 4-6224 §3.2-§3.3

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$x^2 - 4\left(\lambda + \dfrac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0$, με $\lambda \in (0,4)$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. 6)

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου. 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0,4)$. 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; 6)

52) ΑΣΚΗΣΗ 4-6226 §3.2-§3.3

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0$, με $\lambda \in (0,2)$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου. 6)

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0,2)$. 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; 6)

53) ΑΣΚΗΣΗ 4-7510 §3.2-§3.3

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε ένα ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A, s_B, s_Γ και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις: $s_A < s_B$, $s_\Gamma = \dfrac{s_A + 3s_B}{4}$ και $|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α , Β παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.

α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 12)

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε km ικανοποιούν τις σχέσεις $s_A + s_B = 1{,}4$ και $s_A \cdot s_B = 0{,}45$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B. 6)

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, s_Γ και s_Δ. 7)

54) ΑΣΚΗΣΗ 4-7515 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$. 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον: $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$. 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ. 8)

55) ΑΣΚΗΣΗ 4-7516 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$. 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\dfrac{1}{\alpha}$. 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|\rho_1 - \rho_2| = 2$. 10)

56) ΑΣΚΗΣΗ 4-7940 §3.2-§3.3

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2). 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4), με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:
Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και 5)

ii) ο $\dfrac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). 10)

57) ΑΣΚΗΣΗ 4-13078 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση $(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1ου βαθμού. 5)

β) Αν η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης. 10)

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

10)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

§4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΜΑ 2ο

1) ΑΣΚΗΣΗ 2-489 §4.1

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$ 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$ 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων. 9)

2) ΑΣΚΗΣΗ 2-491 §4.1

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. 10)

3) ΑΣΚΗΣΗ 2-503 §4.1

α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$. 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\ge 3$. 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος. 7)

4) ΑΣΚΗΣΗ 2-505 §4.1

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4|=3|x-1|$ 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5|>1$ 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 7)

5) ΑΣΚΗΣΗ 2-1039 §4.1

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\ge 5$. 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). 8)

6) ΑΣΚΗΣΗ 2-1077 §4.1

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<4$. 10)

β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{9} < \frac{1}{\alpha} < 1$. 15)

<u>7) ΑΣΚΗΣΗ 2-1278</u> §4.1

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $d(x,-2) < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$ (Μονάδες 10)

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$ (Μονάδες 15)

<u>8) ΑΣΚΗΣΗ 2-1305</u> §4.1

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4| \geq 3$. 12)

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. 13)

<u>9) ΑΣΚΗΣΗ 2-1533</u> §4.1

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. 10)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1, x_2 να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει: $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$ 15)

<u>10) ΑΣΚΗΣΗ 2-3847</u> §4.1

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 2$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. 13)

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2. 12)

<u>11) ΑΣΚΗΣΗ 2-4305</u> §4.1

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3| \leq 5$ 9)

ii) $|2x-3| \geq 1$ 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. 7)

<u>12) ΑΣΚΗΣΗ 2-4306</u> §4.1

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1) 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| < 2$ (2) 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). 7)

<u>13) ΑΣΚΗΣΗ 2-4317</u> §4.1

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1 \cdot x_2 = -3$ 13)

ΘΕΜΑ 4ο

14) ΑΣΚΗΣΗ 4-1890 §4.1

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0$ (1), με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 12\lambda+25$ (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$. (Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση: $(x_1+x_2-1)^2+(x_1 \cdot x_2+3)^2=0$ (Μονάδες 8)

15) ΑΣΚΗΣΗ 4-2081 §4.1

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$. (Μονάδες 5)

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε. (Μονάδες 10)

ii) Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1+\dfrac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$. (Μονάδες 10)

16) ΑΣΚΗΣΗ 4-2238 §4.1

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2,4)$. (Μονάδες 13)

17) ΑΣΚΗΣΗ 4-4946 §4.1

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-3| \leq 5$. 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-3|$. 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-3| \leq 5$. 5)

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-3| \leq 5$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 8)

18) ΑΣΚΗΣΗ 4-4952 §4.1

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in IR$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. 6)

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3$, $x\in IR$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in IR$. 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$. 6)

19) ΑΣΚΗΣΗ 4-8443 §4.1

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$. 10)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλασίου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14. 5)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του 3x από το 19. 10)

20) ΑΣΚΗΣΗ 4-19364 §4.1

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha$, α(IR

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: EMBED Equation.DSMT4 . 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. 10)

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες EMBED Equation.DSMT4 , EMBED Equation.DSMT4 , τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α 2)

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=4$ 8)

§4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΜΑ 2ο

21) ΑΣΚΗΣΗ 2-478 §4.2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\lambda x+\left(\lambda^2+\lambda-1\right)=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in IR$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές. 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2-P-2\geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1). 13)

22) ΑΣΚΗΣΗ 2-484 §4.2

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5|\leq 3$ και $2x^2-x-1\geq 0$. 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). 9)

23) ΑΣΚΗΣΗ 2-490 §4.2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in IR$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$ 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2-3x+1<0$

10)

24) ΑΣΚΗΣΗ 2-498 §4.2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$. 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3\leq 0$ 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. 7)

25) ΑΣΚΗΣΗ 2-1277 §4.2

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16\leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2). 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. 13)

26) ΑΣΚΗΣΗ 2-1288 §4.2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$ 12)

β) Δίνεται η παράσταση: $A=|x-3|+|x^2-10x+21|$

i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι: $A=-x^2+11-24$ 8)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x\in(3,7)$,για τις οποίες ισχύει $A=6$ 5)

27) ΑΣΚΗΣΗ 2-1297 §4.2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2-4x+1\leq 0$ 12)

β) Αν α,β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης. 13)

28) ΑΣΚΗΣΗ 2-1512 §4.2

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-x-2=0$ 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2-x-2>0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. 12)

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 5)

29) ΑΣΚΗΣΗ 2-1544 §4.2

α) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x. 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$ 15)

30) ΑΣΚΗΣΗ 2-3380 §4.2

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=3x^2+9x-12$, $x\in IR$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 12)

ΘΕΜΑ 4ο

31) ΑΣΚΗΣΗ 4-1874 §4.2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in IR$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16$ (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in IR$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1,x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $d(x_1,x_2)=\sqrt{24}$ (Μονάδες 8)

32) ΑΣΚΗΣΗ 4-2244 §4.2

Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2|<3$ και $x^2-2x-8\le 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,4]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

33) ΑΣΚΗΣΗ 4-2255 §4.2

Δίνονται οι ανισώσεις: $2\le|x|\le 3$ και $x^2-4x<0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[2,3]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

(Μονάδες 10)

34) ΑΣΚΗΣΗ 4-2273 §4.2

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1|\leq 2$ και $x^2-x-2>0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[-3,-1)$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1-\rho_2\in(-2,2)$ (Μονάδες 10)

35) ΑΣΚΗΣΗ 4-2336 §4.2

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-5x+6 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2+(2-\lambda)x+\lambda-2=0$ (1) με παράμετρο λ.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί. (Μονάδες 5)

36) ΑΣΚΗΣΗ 4-4542 §4.2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2<x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: 0, 1, α, α^2, $\sqrt{\alpha}$ Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha}$ (Μονάδες 7)

37) ΑΣΚΗΣΗ 4-4548 §4.2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\frac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ. (Μονάδες 9)

38) ΑΣΚΗΣΗ 4-4607 §4.2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2>x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: 0, 1, α, α^2, $\sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α). (Μονάδες 10)

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$ (Μονάδες 7)

39) ΑΣΚΗΣΗ 4-4663 §4.2

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2 = \lambda(4x-3)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. 5)

β) Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1x_2$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1-3)(4x_2-3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 10)

40) ΑΣΚΗΣΗ 4-4680 §4.2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; 6)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές τουυ λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$. 9)

41) ΑΣΚΗΣΗ 4-4819 §4.2

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + \left(\lambda - \lambda^2\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; 6)

γ) Αν $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1 < \dfrac{x_1+x_2}{2} < x_2$. 4)

ii) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_2)$.,

$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$, $f(x_2+1)$ 5)

42) ΑΣΚΗΣΗ 4-4836 §4.2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. 8)

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης. 5)

γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$ 12)

43) ΑΣΚΗΣΗ 4-4853 §4.2

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$. 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1,2)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$. 9)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$. 7)

44) ΑΣΚΗΣΗ 4-4859 §4.2

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$ με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 5)

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου και α,β δύο πραγματικοί ώστε να ισχύει: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 10)

45) ΑΣΚΗΣΗ 4-5285 §4.2

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - 3x + 2 = 0$ (1) και $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2).

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1). 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2). 10)

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x, να έχει θετική τιμή. 10)

46) ΑΣΚΗΣΗ 4-5316 §4.2

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. 4)

β) **i)** Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$; 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0. 8)

47) ΑΣΚΗΣΗ 4-5322 §4.2

Δίνεται το τριώνυμο: x^2-2x-8

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x. 10)

β) Αν $\kappa=-\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2-2\kappa-8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 8)

γ) Αν ισχύει $-4<\mu<4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2-2|\mu|-8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 7)

48) ΑΣΚΗΣΗ 4-5884 §4.2

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-6x+\lambda-3$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. 7)

γ) Αν $3<\lambda<12$, τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. 6)

ii) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 7)

49) ΑΣΚΗΣΗ 4-5885 §4.2

α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2+9x+18$ 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+3|+|x^2+9x+18|=0$ 7)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x. 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18$ 7)

50) ΑΣΚΗΣΗ 4-6227 §4.2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-5x-6<0$. 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\frac{46}{47}-6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. 7)

γ) Αν $\alpha\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 8)

51) ΑΣΚΗΣΗ 4-7263 §4.2

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-6x+\lambda-7$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες. 7)

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 4)

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 4)

<u>52) ΑΣΚΗΣΗ 4-7677</u> §4.2

Δίνεται η ανίσωση: $|x+1| < 4$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \le 0$. 15)

<u>53) ΑΣΚΗΣΗ 4-7684</u> §4.2

Δίνεται η ανίσωση: $|x-1| \le 3$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \ge 0$. 15)

<u>54) ΑΣΚΗΣΗ 4-7745</u> §4.2

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου f(x) για τις διάφορες τιμές του x. 10)

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2{,}999) \cdot f(-1{,}002)$ 7)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$. 8)

<u>55) ΑΣΚΗΣΗ 4-7958</u> §4.2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 1 \ge \frac{5}{2}x$.(1) 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ,λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ,λ. 8)

ii) Να δείξετε ότι: $|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$. 7)

56) ΑΣΚΗΣΗ 4-7974 §4.2

Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha-2|<1$.

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α. 8)

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της. 10)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$. 7)

57) ΑΣΚΗΣΗ 4-8217 §4.2

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-6<0$. 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$. 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω παραλληλόγραμμο με πλευρές α και $\alpha+1$ όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$. Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E<6$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου. 5)

58) ΑΣΚΗΣΗ 4-8445 §4.2

α) Δίνεται το τριώνυμο x^2-3x+2, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου. 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α,β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$. 15)

59) ΑΣΚΗΣΗ 4-13086 §4.2

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. 9)

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda\leq0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. 10)

60) ΑΣΚΗΣΗ 4-13102 §4.2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. 10)

δ) Αν $\left|\lambda^2-4\lambda-5\right|=4\lambda-\lambda^2+5$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1,5\}$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. 5)

<u>61) ΑΣΚΗΣΗ 4-13107</u> §4.2

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών. 5)

γ) Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 6)

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2, με $x_1<x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου f(0)·f(κ)·f(μ), όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1<\kappa<x_2<\mu$. 6)

<u>62) ΑΣΚΗΣΗ 4-20330</u> §4.2

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y=60t-5t^2$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y=175m$; 8)

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m. 9)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο : ΠΡΟΟΔΟΙ

§5.1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ
§5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

1) ΑΣΚΗΣΗ 2-474 §5.1-§5.2

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, …

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. 10)

2) ΑΣΚΗΣΗ 2-480 §5.1-§5.2

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει κ καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7^{η} σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; 13)

3) ΑΣΚΗΣΗ 2-508 §5.1-§5.2

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1, 2, 3,…,ν. 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. 13)

4) ΑΣΚΗΣΗ 2-1015 §5.1-§5.2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της. 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. 15)

5) ΑΣΚΗΣΗ 2-1050 §5.1-§5.2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί $x+2$, $(x+1)^2$, $3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i) $x = 1$

ii) $x = -1$. 12)

6) ΑΣΚΗΣΗ 2-1057 §5.1-§5.2

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς. 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; 8)

7) ΑΣΚΗΣΗ 2-1064 §5.1-§5.2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}. 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. 8)

8) ΑΣΚΗΣΗ 2-1086 §5.1-§5.2

Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε τη τιμή του x. 10)

β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω. 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. 8)

9) ΑΣΚΗΣΗ 2-1101 §5.1-§5.2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$ 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. 13)

10) ΑΣΚΗΣΗ 2-1301 §5.1-§5.2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$. 12)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. 13)

11) ΑΣΚΗΣΗ 2-1513 §5.1-§5.2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_3 = 9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. 12)

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu > 30$. 13)

12) ΑΣΚΗΣΗ 2-4300 §5.1-§5.2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152. 13)

13) ΑΣΚΗΣΗ 2-4301 §5.1-§5.2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2$ 13)

β) Αν $\alpha_{15}-\alpha_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. 12)

14) ΑΣΚΗΣΗ 2-4303 §5.1-§5.2

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_4-\alpha_9=15$ και $\alpha_1=41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με –3. 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu=\nu$. 13)

15) ΑΣΚΗΣΗ 2-4304 §5.1-§5.2

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega=4$, ισχύει: $\alpha_6+\alpha_{11}=40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. 12)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 13)

16) ΑΣΚΗΣΗ 2-4312 §5.1-§5.2

Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega=4$. 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. 13)

17) ΑΣΚΗΣΗ 2-4319 §5.1-§5.2

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1=2$ και $\alpha_5=14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega=3$. 12)

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. 13)

(Δίνεται: $\sqrt{1849}=43$)

ΘΕΜΑ 4ο

18) ΑΣΚΗΣΗ 4-2047 §5.1-§5.2

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το ν-οστό όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20^{η} κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

<u>19) ΑΣΚΗΣΗ 4-2083</u> §5.1-§5.2

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

<u>20) ΑΣΚΗΣΗ 4-2323</u> §5.1-§5.2

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (Μονάδες 7)

<u>21) ΑΣΚΗΣΗ 4-4671</u> §5.1-§5.2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20}-\alpha_{10}=10\omega$. 6)

β) Αν $\alpha_{20}-\alpha_{10}=30$ και $\alpha_1=1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu=3\nu-2$. 6)

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; 7)

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; 6)

<u>22) ΑΣΚΗΣΗ 4-4858</u> §5.1-§5.2

Μία περιβαλλοντολογική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίζει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:

α) Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτους από το 2000 και μετά. 6)

β) Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:

i) Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012. 6)

ii) Να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%. 6)

iii) Να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δεν θα υπερβεί τα 2600 ελάφια. 7)

<u>23) ΑΣΚΗΣΗ 4-4925</u> §5.1-§5.2

Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός. 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$. 8)

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. 9)

<u>24) ΑΣΚΗΣΗ 4-6143</u> §5.1-§5.2

Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:
«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x. 6)

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές. 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. 13)

<u>25) ΑΣΚΗΣΗ 4-7503</u> §5.1-§5.2

Οι αριθμοί: x^2+5, x^2+x, $2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x. 6)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. 6)

iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + ... + \alpha_{24}$. 8)

<u>26) ΑΣΚΗΣΗ 4-7504</u> §5.1-§5.2

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$. 9)

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της. 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+...+(\alpha_{31}+31)$

10)

27) ΑΣΚΗΣΗ 4-7514 §5.1-§5.2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3=10$ και $\alpha_{20}=61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$. 9)

28) ΑΣΚΗΣΗ 4-10775 §5.1-§5.2

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά αυτής της προόδου. 5)

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. 4)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; 5)

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. 6)

29) ΑΣΚΗΣΗ 4-13093 §5.1-§5.2

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3 € και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5 € περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. 4)

β) Αν, για κάθε $\nu\le 51$ ο αριθμός αν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί α_1, α_2, …, α_{51} είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης. 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{10201}=101$) 8)

30) ΑΣΚΗΣΗ 4-13156 §5.1-§5.2

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου ν $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι: $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4$, $\alpha_3 = x^2 - 2$, όπου $x \in \mathbb{Z}$, τότε,

α) να αποδειχθεί ότι $x = 3$. 10)

β) να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014. 8)

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{15}$. 7)

§5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

31) ΑΣΚΗΣΗ 2-495 §5.3

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$ 12)

32) ΑΣΚΗΣΗ 2-1032 §5.3

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x , $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x = 1$

ii) $x = -1$ 12)

33) ΑΣΚΗΣΗ 2-1088 §5.3

α) Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. 9)

β) Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. 7)

34) ΑΣΚΗΣΗ 2-1100 §5.3

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1) , με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$. 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. 13)

35) ΑΣΚΗΣΗ 2-3828 §5.3

Οι αριθμοί $\kappa - 2$, 2κ και $7\kappa + 4$, $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου. 12)

β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$ 7)

<u>36) ΑΣΚΗΣΗ 2-4288</u> §5.3

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. 13)

β) Αν $x = 5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. 6)

<u>37) ΑΣΚΗΣΗ 2-4315</u> §5.3

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. 15)

ΘΕΜΑ 4ο

<u>38) ΑΣΚΗΣΗ 4-2340</u> §5.3

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το νο μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το νο μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 5)

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

<u>39) ΑΣΚΗΣΗ 4-4629</u> §5.3

Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους 1 m, με τον ακόλουθο τρόπο:
Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το 1ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2ο λεπτό προχωράει 3 cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2 cm μεγαλύτερη από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο α_ν αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού. (Μονάδες 4)

δ) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: Το 1ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2ο λεπτό προχωράει 2 cm, το 3ο λεπτό προχωράει 4 cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο β_ν αυτής της προόδου. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm. (Μονάδες 5)

<u>40) ΑΣΚΗΣΗ 4-6678</u> §5.3

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α,β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι $E = 1$. 10)

β) Αν $\alpha + \beta = 10$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α,β. 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη α,β. 10)

<u>41) ΑΣΚΗΣΗ 4-6859</u> §5.3

Δίνονται οι αριθμοί 2 , x , 8 με $x > 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; 5)

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; 5)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, … και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, … τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν). 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2(S_\nu + 24) = \beta_7$. 8)

42) ΑΣΚΗΣΗ 4-8170 §5.3

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:
$\alpha_3 = 4$, $\alpha_5 = 15$ και $\lambda > 0$.

α) Να βρεθούν ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ της προόδου. 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν). 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των δέκα πρώτων όρων των ακολουθιών (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $S'_{10} = \dfrac{1}{2^9} S^{10}$. 8)

43) ΑΣΚΗΣΗ 4-13088 §5.3

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα. 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.; 9)

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. 9)

44) ΑΣΚΗΣΗ 4-13092 §5.3

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης $(\nu \le 5)$.

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της. 6)

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν. 6)

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; 7)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο : ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 2ο

1) ΑΣΚΗΣΗ 2-488 §6.1

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α. 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$ 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$. 10)

2) ΑΣΚΗΣΗ 2-510 §6.1

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x \le 3 \\ x^2, & 3<x<10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος. 8)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές f(–1), f(3) και f(5). 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$. 9)

3) ΑΣΚΗΣΗ 2-999 §6.1

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6. 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης. 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ 8)

4) ΑΣΚΗΣΗ 2-1042 §6.1

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} 2x+4, & x<0 \\ x-1, & x \ge 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$ 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in$ IR, ώστε: $f(x)=0$ 12)

5) ΑΣΚΗΣΗ 2-1082 §6.1

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$. 10)

6) ΑΣΚΗΣΗ 2-1096 §6.1

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y=35+0{,}8x$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά; 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α; 13)

7) ΑΣΚΗΣΗ 2-1302 §6.1

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases} 8-x \ , \ x<0 \\ 2x+5 \ , \ x\geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5)=f(4)$. 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=9$. 12)

8) ΑΣΚΗΣΗ 2-1532 §6.1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x)=x^2+4x$. 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$. 10)

9) ΑΣΚΗΣΗ 2-1537 §6.1

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$. 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\dfrac{5}{2}$. 15)

ΘΕΜΑ 4ο

10) ΑΣΚΗΣΗ 4-4682 §6.1

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; 6)

γ) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. 9)

11) ΑΣΚΗΣΗ 4-6228 §6.1

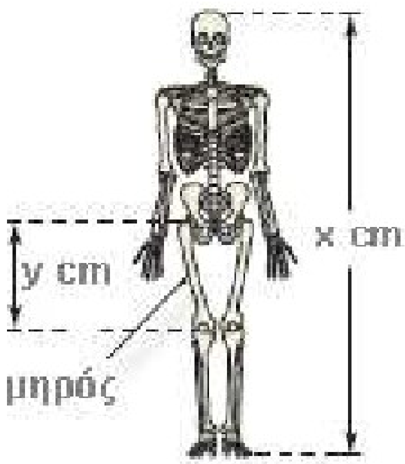
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x,y τέτοια, ώστε: $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x) = \frac{1}{2}\left(-x^2 + 10x\right)$, $x \in (0,10)$. 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \le \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,10)$. 8)

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0,10)$ το εμβαδόν E(x) γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ; 8)

12) ΑΣΚΗΣΗ 4-7502 §6.1



Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:

Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας: $y = 0,45x - 31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. 9)

13) ΑΣΚΗΣΗ 4-7517 §6.1

Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος Κ(ν) της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα. 5)

β) Να γράψετε μία σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα Ε(ν) της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα. 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i) να μην έχει ζημιά. 7)

ii) να εχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. 8)

14) ΑΣΚΗΣΗ 4-8455 §6.1

Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β∈IR ισχύει:

- $|1-3\alpha|<2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3}<\alpha<1$. 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta-3\alpha-1|<3$. 10)

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο IR των πραγματικών αριθμών. 10)

15) ΑΣΚΗΣΗ 4-13084 §6.1

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το IR–{–2,1}.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ. (Μονάδες 9)

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g. 9)

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha+3)>g(\alpha)$, όταν α∈(–1,1)∪(1,2). 7)

16) ΑΣΚΗΣΗ 4-13085 §6.1

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το IR–{–2,1}.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ. (Μονάδες 9)

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g. 9)

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$, όταν α,β∈(–1,1)∪(1,2). 7)

§6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 2ο

17) ΑΣΚΗΣΗ 2-477 §6.2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f. 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y. 9)

18) ΑΣΚΗΣΗ 2-492 §6.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15$, x∈IR.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)-f(1)$. 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες. 15)

19) ΑΣΚΗΣΗ 2-1090 §6.2

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha,\frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β. 9)

20) ΑΣΚΗΣΗ 2-1542 §6.2

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A=x^3-x^2+3x-3$ 13)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το Α(1,3). 12)

21) ΑΣΚΗΣΗ 2-3378 §6.2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. 6)

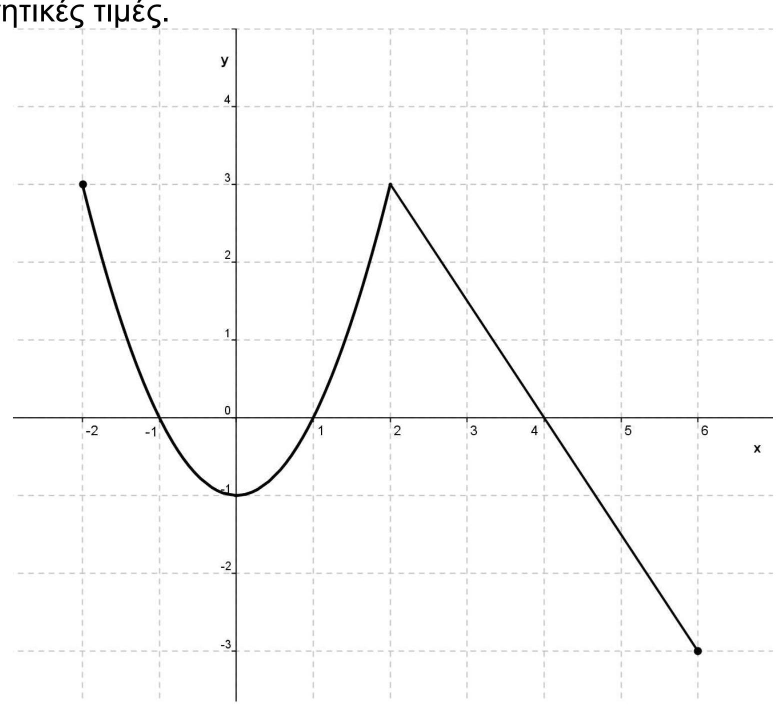
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–2	–1		1	2	
y			–1			–3

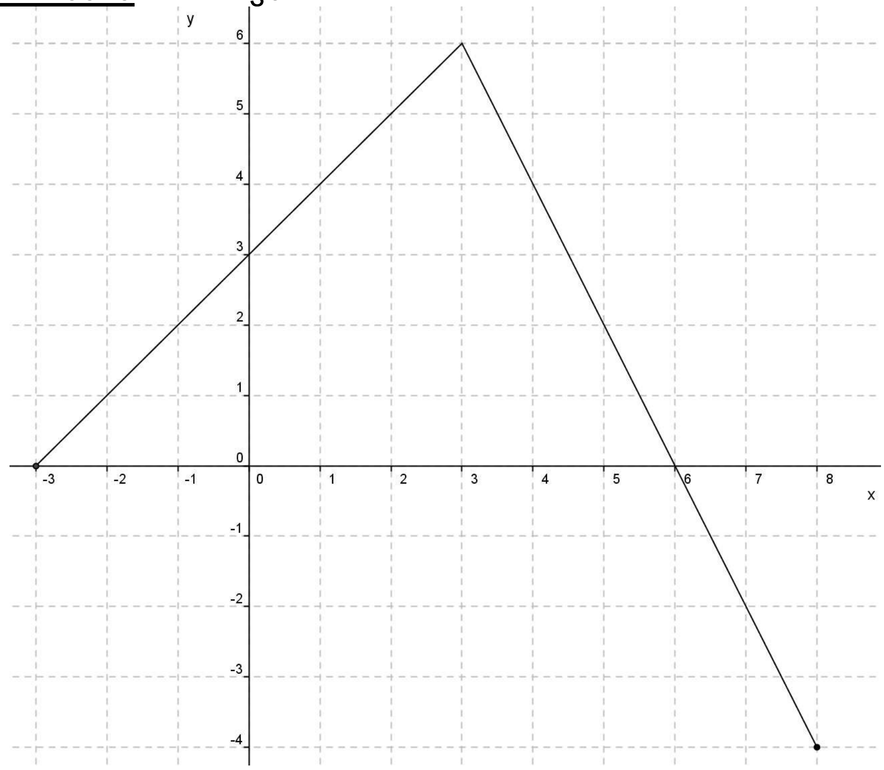
6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. 6)

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές. 7)



22) ΑΣΚΗΣΗ 2-3379 §6.2



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–3	–1	0	3		
y					–2	–4

6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές. 7)

23) ΑΣΚΗΣΗ 2-3381 §6.2

Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x)=\dfrac{2x^2-4x+\mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο Α(1,4),

α) να δείξετε ότι $\mu=-6$. 9)

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. 9)

γ) για $\mu=-6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. 7)

ΘΕΜΑ 4ο

24) ΑΣΚΗΣΗ 4-1963 §6.2

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $\left(x_1+x_2\right)^2=\left|x_1+x_2\right|+2$. (Μονάδες 9)

25) ΑΣΚΗΣΗ 4-2338 §6.2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1,2) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής. (Μονάδες 10)

26) ΑΣΚΗΣΗ 4-4545 §6.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x)=|x|-2$. (Μονάδες 9)

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $\left(f(x)+2\right)^2-4f(x)-5=0$ (Μονάδες 10)

27) ΑΣΚΗΣΗ 4-4575 §6.2

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2-4x+\alpha$ και $g(x)=\alpha x-5$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha=1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$ (Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $\left|f(x)-g(x)\right|=f(x)-g(x)$ (Μονάδες 5+5=10)

28) ΑΣΚΗΣΗ 4-4679 §6.2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\dfrac{\alpha}{4}}$

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. 10)

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$. 8)

29) ΑΣΚΗΣΗ 4-4912 §6.2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$, με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία. 10)

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. 10)

30) ΑΣΚΗΣΗ 4-5882 §6.2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

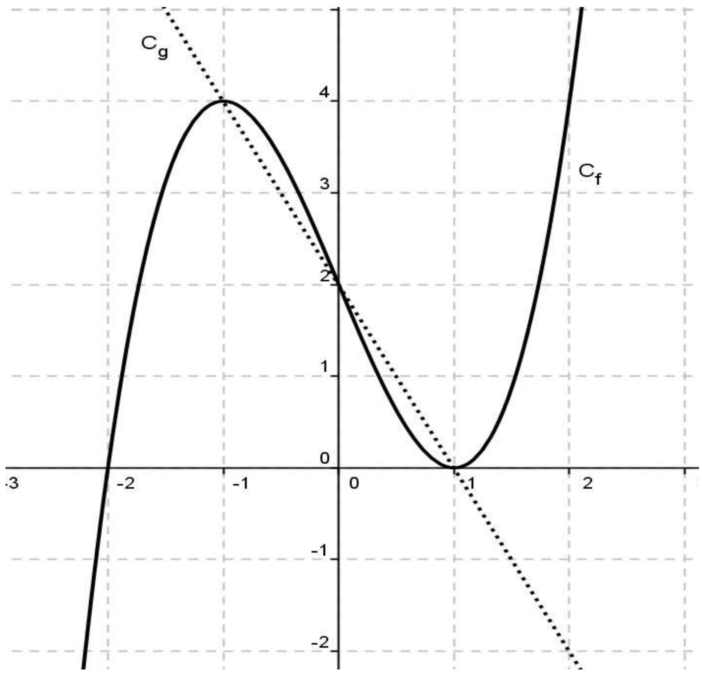
α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. 9)

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. 12)

31) ΑΣΚΗΣΗ 4-6146 §6.2

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$ 6)

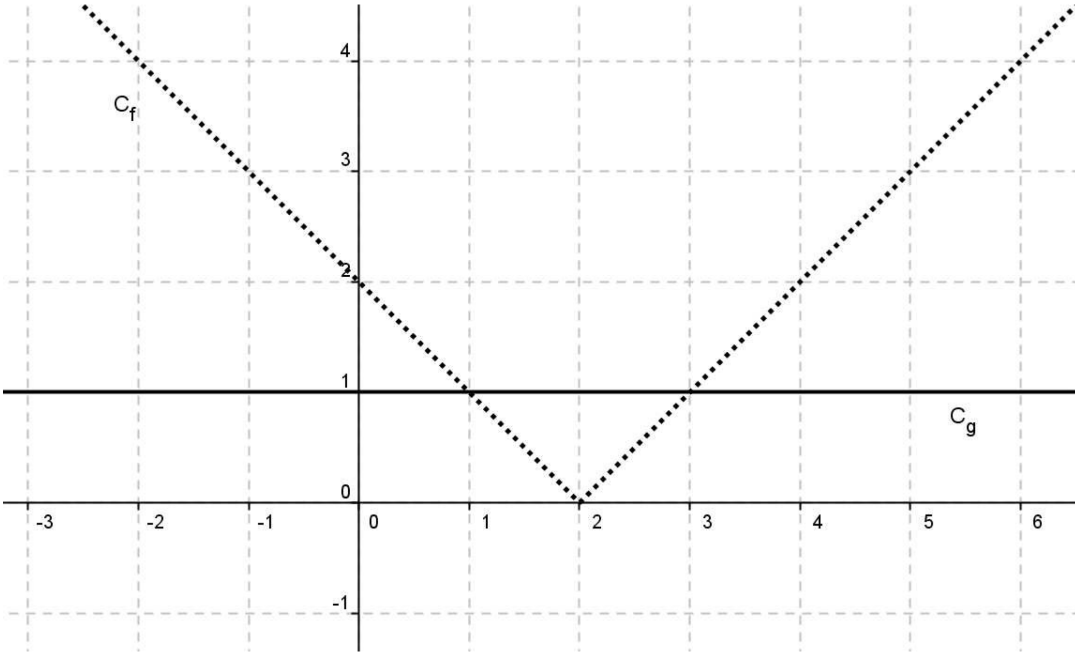
β) Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. 6)

γ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

δ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. 7)

32) ΑΣΚΗΣΗ 4-7784 §6.2

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=1$, $x\in IR$.



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g. 10)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα. 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$A=\frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$$ 5)

33) ΑΣΚΗΣΗ 4-8448 §6.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases} x-3 & , \ x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$ 7)

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y. 8)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$. 5)

34) ΑΣΚΗΣΗ 4-8451 §6.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha\in IR$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=2x-\alpha$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

8)

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1,–1). 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y. 5)

35) ΑΣΚΗΣΗ 4-13090 §6.2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1$, x(IR

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση EMBED Equation.DSMT4 $h(x)=x+\alpha$. Να δείξετε ότι:

i) αν $\alpha>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) αν $\alpha<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία. 15)

§6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)=\alpha x+\beta$

ΘΕΜΑ 2ο

36) ΑΣΚΗΣΗ 2-1024 §6.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1,6), Β(–1,4) να βρείτε τις τιμές των α,β. 13)

β) Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y. 12)

37) ΑΣΚΗΣΗ 2-1283 §6.3

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της. 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση. 8)

38) ΑΣΚΗΣΗ 2-1293 §6.3

Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (˚C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: $T=15+25\cdot x$, όταν $0\le x\le 200$.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290˚C. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440˚C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 8)

39) ΑΣΚΗΣΗ 2-1529 §6.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με α,β∈IR, για την οποία ισχύει: $f(0)=5$ και $f(1)=3$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=5$. 10)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x'x και y'y. (Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

<u>40) ΑΣΚΗΣΗ 2-1553</u> §6.3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$, x∈IR.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε. 13)

β) Αν Α, Ο, Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου Ο(0,0), να αποδείξτε ότι Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο. 12)

<u>41) ΑΣΚΗΣΗ 2-2212</u> §6.3

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f. 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$, για κάθε x∈Α. 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$. 5)

ΘΕΜΑ 4ο

<u>42) ΑΣΚΗΣΗ 4-1880</u> §6.3

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)

γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β. (Μονάδες 8)

<u>43) ΑΣΚΗΣΗ 4-2046</u> §6.3

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. (Μονάδες 5)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$ (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος. (Μονάδες 4)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 9)

<u>44) ΑΣΚΗΣΗ 4-2084</u> §6.3

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm.

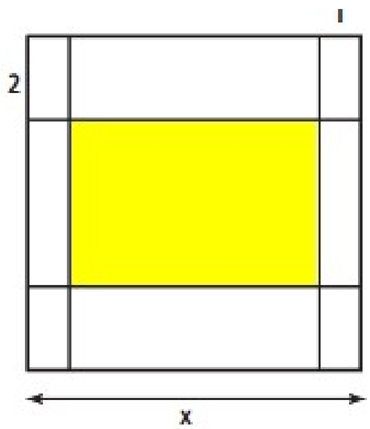
α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

<u>45) ΑΣΚΗΣΗ 4-2226</u> §6.3



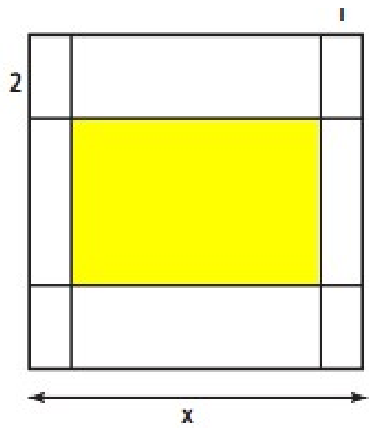
Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm $(5 \le x \le 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4)$ (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2. (Μονάδες 7)

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2. (Μονάδες 10)

<u>46) ΑΣΚΗΣΗ 4-2229</u> §6.3



Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm $(5 \le x \le 10)$, στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = x^2 - 6x + 8$ (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί το η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2. (Μονάδες 7)

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ 35 cm^2, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου. (Μονάδες 10)

47) ΑΣΚΗΣΗ 4-2234 §6.3

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις **Π1** και **Π2**:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου $\left({}^\circ C\right)$ σε βαθμούς Φαρενάιτ $\left({}^\circ F\right)$, πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου $\left({}^\circ C\right)$ σε βαθμούς Κέλβιν $\left({}^\circ K\right)$, προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου $\left({}^\circ C\right)$ το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση. (Μονάδες 8)

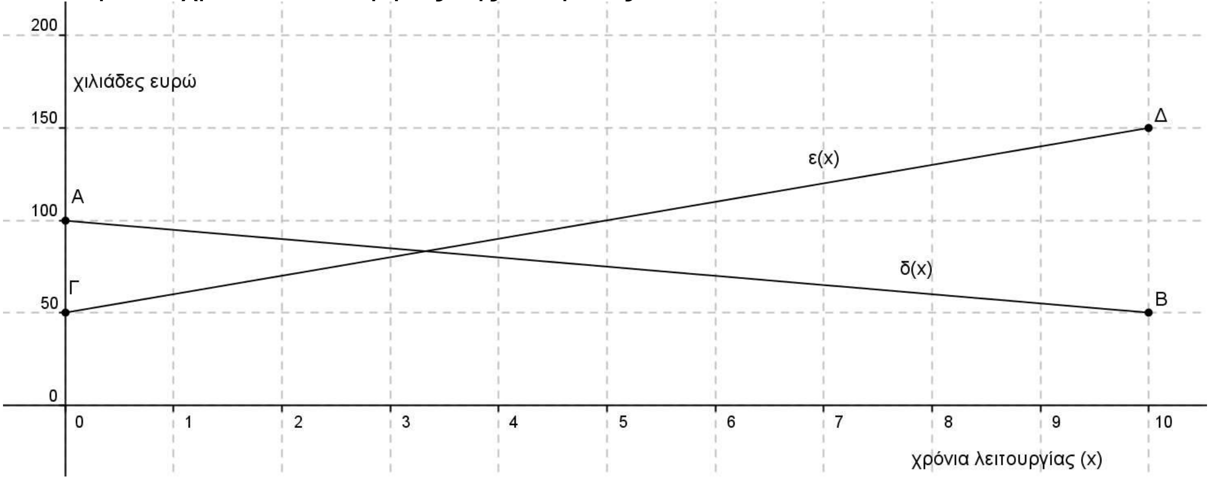
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν $\left({}^\circ K\right)$ και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ $\left({}^\circ F\right)$ είναι η:

$$K = \frac{F-32}{1{,}8} + 273$$ (Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278 ${}^\circ K$ μέχρι 283 ${}^\circ K$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ${}^\circ F$. (Μονάδες 10)

48) ΑΣΚΗΣΗ 4-2339 §6.3

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(0,100) και Β(10,50) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης δ(x) των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με Γ(0,50) και Δ(10,150) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων ε(x) της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. (Μονάδες 4)

β) **i)** Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων δ(x), ε(x) και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές. (Μονάδες 15)

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

49) ΑΣΚΗΣΗ 4-4647 §6.3

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(0,2). (Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β(2,0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 10)

50) ΑΣΚΗΣΗ 4-4656 §6.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα x΄x. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)

γ) Έστω Μ(x,y) σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου Μ ισχύει: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)

51) ΑΣΚΗΣΗ 4-4657 §6.3

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } x < 0 \\ x+2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y΄y. (Μονάδες 3)

β) **i)** Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. (Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) **i)** Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 8)

52) ΑΣΚΗΣΗ 4-4660 §6.3

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g. 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f. 10)

53) ΑΣΚΗΣΗ 4-4861 & 4-2220 §6.3

Μία μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της προσδιορίζεται από τη συνάρτηση $h(t) = -5t^2 + 10t + 1{,}05$.

α) Να βρείτε τις τιμές h(0), h(1) και h(2) και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος. 6)

β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα πέσει στο έδαφος. 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο: $h(t) = 5\left[1{,}21 - (t-1)^2\right]$. 5)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05 m. 6)

54) ΑΣΚΗΣΗ 4-4862 §6.3

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 12 + 0{,}5x & \text{αν } 0 \le x \le 30 \\ 0{,}7x + 6 & \text{αν } x > 30 \end{cases}.$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. 3)

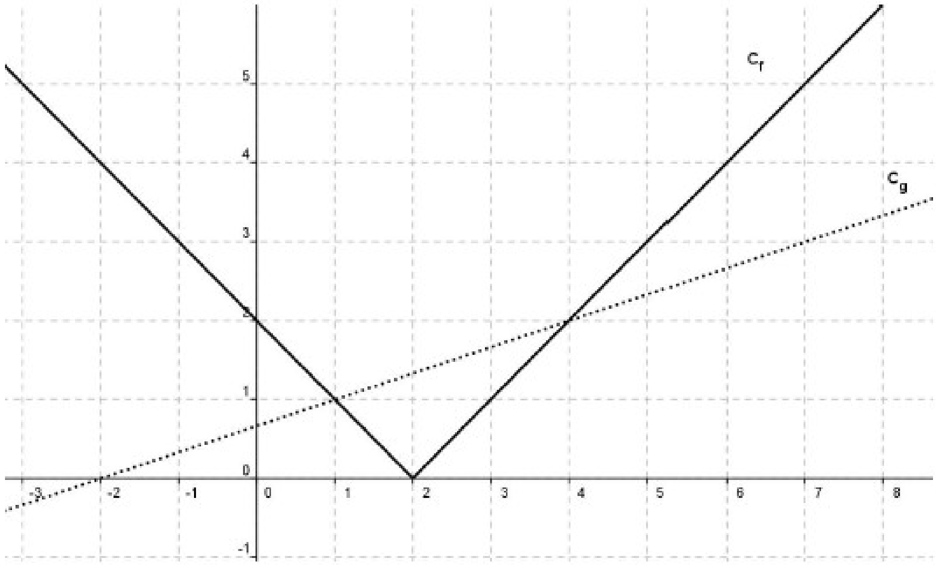
iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. 5)

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο $g(x) = 12 + 0{,}6x$, για $x \ge 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό από τον κάτοικο της πόλης Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δυο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. 15)

55) ΑΣΚΗΣΗ 4-4886 §6.3

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x-2|$ και $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g. 6)
β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). 8)
γ) Με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g. 6)
δ) Με την βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$. 5)

56) ΑΣΚΗΣΗ 4-5275 §6.3
Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y=60+0,20x$ όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.
α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km; 5)
β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ; 5)
γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y=80+0,10x$ όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. 10)
δ) Αν $f(x)=60+0,20x$ και $g(x)=80+0,10x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ). 5)

57) ΑΣΚΗΣΗ 4-5879 §6.3
Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα μα τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθυγράμμου τμήματος.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM > 600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ με $OA = 600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t \geq 0$,η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_{\Lambda}(t) = 10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση χελώνας από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_X(t) = 600 + 40t$ μέτρα.

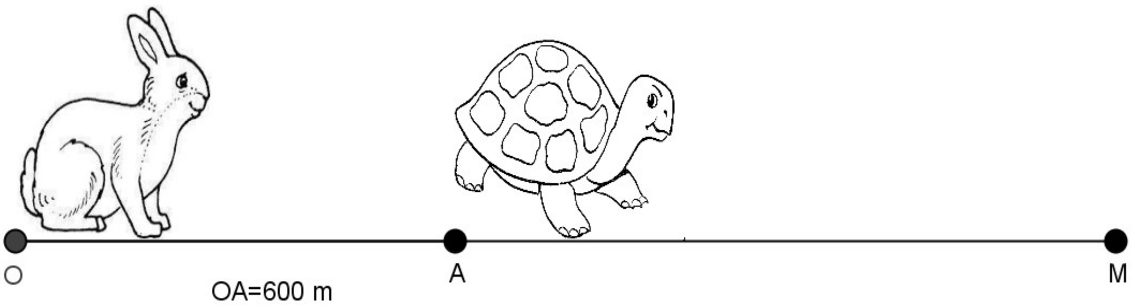
α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το σημείο Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. 10)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι $OM = 2250$ μέτρα. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα; 5)

ii) Ποιος τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12$ min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση; 5)

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής τον αγώνα; 5)



58) ΑΣΚΗΣΗ 4-6229 §6.3

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα 'RED' χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα 'YELLOW' χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν f(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'RED' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)			

3)

ii) Αν g(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'YELLOW' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

3)

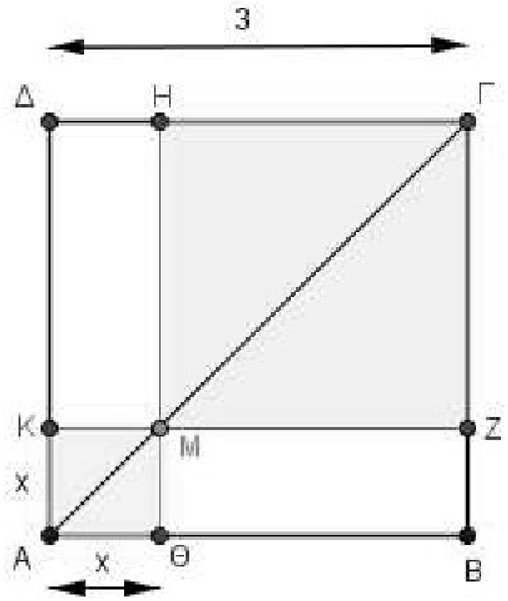
β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f,g και τους τύπους τους f(x), g(x). 8)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας 'RED' είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. 8)

δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία 'RED' και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β. 3)

59) ΑΣΚΗΣΗ 4-6231 §6.3

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



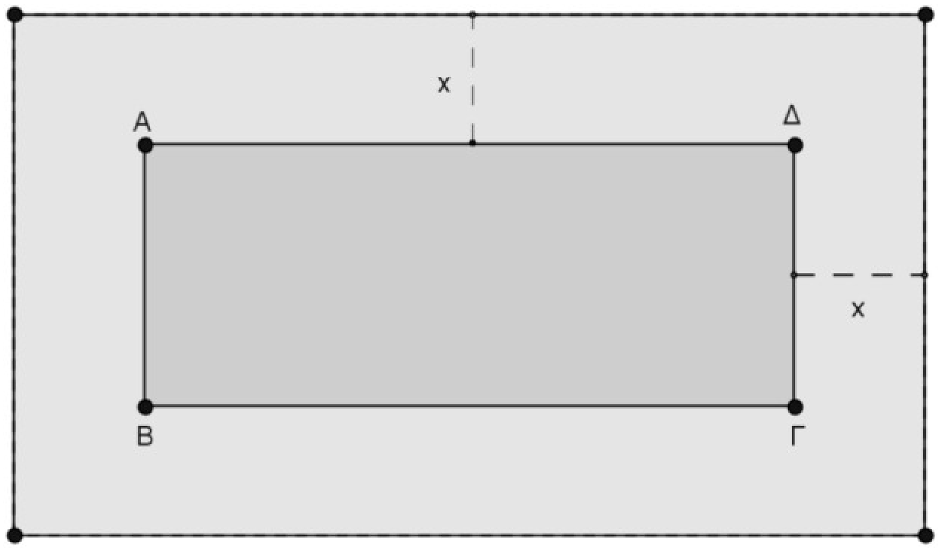
α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$ με $x \in (0,3)$. 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$ για κάθε $x \in (0,3)$. 8)

γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

60) ΑΣΚΗΣΗ 4-7511 §6.3

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15 m και 25 m. Ο δήμος, για λόγους ασφαλείας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 4x^2 + 80x$, $x > 0$ 9)

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500\ m^2$. 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\ m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 9)

61) ΑΣΚΗΣΗ 4-7512 §6.3

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi = 40$ cm. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:

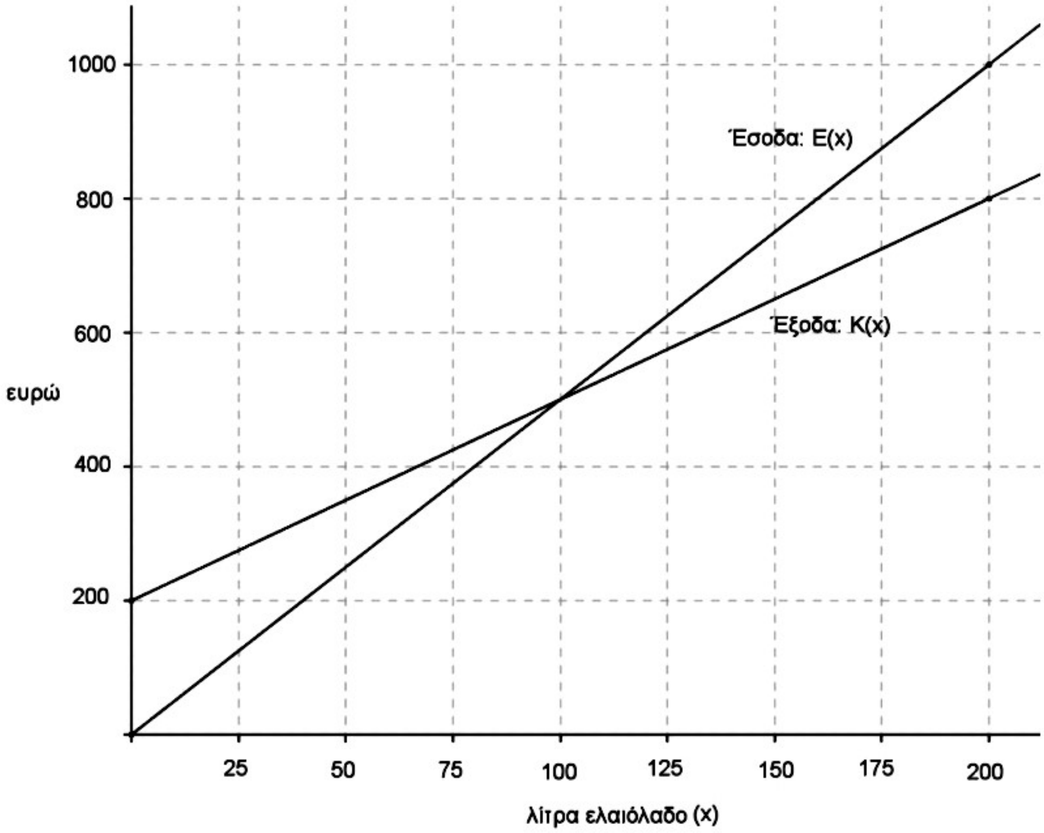
α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$. 4)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(x) του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 20x - x^2$. 8)

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0,20)$. 6)

δ) Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm. 7)

62) ΑΣΚΗΣΗ 4-10774 §6.3



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα Κ(x) και τα έσοδα Ε(x) από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του. 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας; 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων K(x) και E(x) και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ). 8)

63) ΑΣΚΗΣΗ 4-13155 §6.3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το IR.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x΄x. 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία (3,0) και (–3,0) . 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες. 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το A(0,3) και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox. 7)

64) ΑΣΚΗΣΗ 4-13158 §6.3

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x)=15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος; 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. 9)

ΚΑΛΗ ΜΕΛΕΤΗ!

ΧΑSIM 2020